
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01013811 3

LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

25031 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS
Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES,

PAR

M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE DIJON.

OUVRAGE HONORÉ D'UNE SOUSCRIPTION DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES CLASSIQUES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

AVERTISSEMENT DE LA QUATRIÈME PARTIE.

Par la variété infinie et le caractère pittoresque de ses conceptions, par la précision élégante dont ses énoncés sont susceptibles, la Géométrie ouvre à l'Analyse le plus vaste et le plus attrayant de ses champs d'application ; ses besoins spéciaux ont encore provoqué beaucoup des recherches dont les résultats l'ont constituée. Elle n'en est pas moins tombée vis-à-vis de cette dernière dans une étroite sujétion, incapable de rien ajouter à ses ressources propres, ni à sa certitude, ce que je me suis appliqué, dans les autres Volumes, à faire ressortir en des points de doctrine qui me paraissent importants. En plaçant ce dernier à leur suite, je crois donc me conformer aussi peu à la nature des choses, que si j'eusse écrit un Précis de Mécanique. J'ai simplement écouté un usage suivi par la plupart des Auteurs, les suggestions encore de plusieurs personnes dont l'intérêt a honoré mon œuvre, et qui croient pouvoir attendre de ce complément quelque regain de faveur pour mes théories.

Moi-même d'ailleurs, je ne désespère pas qu'il en soit un peu ainsi ; car, si je ne pourrais, sans infliger à mes lecteurs le plus insupportable ennui, prendre un à un les raisonnements fondés principalement sur la continuité des figures géométriques, pour mettre à nu leur infirmité sans remède, il me sera facile de montrer qu'ici encore il suffit de ne pas s'obstiner à voir les choses autrement qu'elles ne sont, de renoncer à vouloir créer sans cesse la vérité de rien, sinon pour donner aux démonstrations la brièveté des Éléments, du moins pour leur rendre la même solidité et la même clarté. Les théories géométriques n'existeraient pas sans le *calcul*, qui déjà montre sa nécessité sous la forme rudimentaire des proportions du « Troisième Livre », qui, plus haut, s'impose ouvertement, en permettant *seul* de rattacher

mutuellement les diverses parties d'une figure autrement qu'*in situ*. Or les calculs, ce sont les *fonctions* qu'ils engendrent, qui, à leur tour, les résument et les classent; et, en dehors de quelques rêves fort pénibles dont rien n'est encore sorti, *les fonctions se trouvent n'être que des polynômes ou des séries entières*. Telle est, après quelques axiomes spéciaux bien vite perdus de vue, la vraie source des vérités géométriques, celle où l'on peut remonter sans jamais s'égarer, qui les fournit toutes, apportant en même temps l'explication de leur existence. C'est au développement rapide de cette idée, que les pages suivantes sont principalement consacrées, et je croirai n'avoir pas perdu toute ma peine si elles réussissent à lui faire faire un peu de chemin.

On dissémine habituellement les théories géométriques à travers celles de l'Analyse, rompant ainsi l'enchaînement naturel des unes et des autres. J'ai fait le contraire, séduit par cet autre avantage très grand, de ne plus assujettir l'ordonnance des questions à celle des faits purement analytiques dont la connaissance est nécessaire à leur solution. Par exemple, on peut bien ailleurs parler de très bonne heure de la plus grande partie des figures enveloppes, car les calculs n'y comportent que des différentiations et des éliminations (ces dernières étant considérées, quoique à tort selon moi, comme indépendantes de l'intégration); mais on est forcé d'ajourner, ou bien de traiter par voie d'indication seulement, le cas des lignes enveloppes d'une ligne à deux paramètres (103), car elles dépendent d'une équation différentielle à intégrer. L'exacte définition de l'hélice est impossible sans l'intervention du Calcul intégral. Il est inconcevable encore que l'on prenne souvent l'arc d'une courbe pour variable indépendante, avant d'avoir donné une réalité mathématique à l'existence de cette grandeur en montrant la possibilité et les moyens de la mesurer. Etc.

La considération continuelle des infiniment petits, sous son apparence facile, le départ à faire entre ceux qui sont négligeables et les autres, etc., n'apporte guère à l'esprit que de la fatigue et de l'impatience, au raisonnement, que de la faiblesse, et ici, comme ailleurs, j'y ai tout à fait renoncé. La classification, le maniement des infiniment petits sont rationnellement

impossibles en dehors des séries entières où tous puisent leur existence et leur exacte représentation; de plus, *ils ont toujours disparu dans les formules définitives, propres aux calculs numériques*. Je n'aperçois donc que des raisons pour s'en débarrasser une fois de plus, et je leur ai toujours substitué ce qui *reste* dans ces formules, savoir, les coefficients des séries en question, autrement dit, les dérivées des fonctions engagées dans les calculs. J'ai quelquefois écrit des différentielles à leur place, jamais toutefois comme accroissements infiniment petits, toujours pour échapper à l'incommodité typographique de la notation des dérivées qui a fâcheusement prévalu.

Les raisonnements dits « géométriques » le sont de nom et d'apparence seulement, car ils ne tiendraient pas longtemps si, de près ou de loin, ils n'étaient renforcés par des faits généraux que le calcul a fait connaître, qu'il pourrait tout au moins ne plus laisser à l'état de vagues présomptions. Leur utilité possible dans l'invention, leur facilité fréquente, la beauté ou le piquant de quelques-uns n'empêchent pas leur puissance d'être limitée, ni la dissemblance et les détours de leurs moyens d'amener partout une désagrégation nuisible à la nette compréhension de l'ensemble. Je les ai donc évités pour laisser luire la lumière autrement pénétrante que les formules générales projettent toujours quand on veut avoir la patience de les creuser et de les plier aux incidents des discussions. Leur emploi d'ailleurs cesserait bientôt d'être jugé pénible, si au lieu de l'esquiver on s'appliquait à s'y faire la main.

Comme dans mes *Nouveaux Éléments de Géométrie*, et cela pour les mêmes raisons, j'ai fait, des questions ayant le plan pour domaine restreint, non une chose à part, mais un simple cas particulier de celles de l'espace. A voir les choses ainsi, il y a économie de temps, ampleur et clarté tout à la fois. La notion de ligne et celle de surface étant à peu près inséparables, j'ai toujours rapproché les théories similaires intéressant ces deux variétés de figures.

J'ai placé au début tout ce qui concerne la mesure des grandeurs géométriques, n'apercevant pour ces matières aucun lieu plus convenable, tenant encore à définir et à mesurer l'arc d'une ligne courbe avant de l'introduire dans les calculs. La forme très

précise sous laquelle se présentent les restes des séries entières m'a fourni le moyen de donner à tous ces raisonnements une rigueur facile et uniforme qui me paraît leur avoir toujours manqué. Une Note de M. Schwarz, consignée dans le Cours autographié de M. Hermite, à la Faculté des Sciences de Paris, publié en 1883, a signalé une imperfection très grave dans les considérations conduisant à la mesure d'une aire courbe; elle ne m'a pas dicté toutefois la correction que j'en ai faite (35 *et suiv.*), car mes élèves l'entendaient depuis une dizaine d'années dans mon amphithéâtre.

Le rattachement du surplus aux contacts de divers ordres m'en a fourni une classification et une ordonnance qui leur manquaient, et que je crois assez satisfaisantes. On pourra juger un peu longue et sèche ma théorie générale des contacts, mais, sans la condamner tout à fait, si l'on prend garde qu'elle fournit d'avance la raison de beaucoup de faits particuliers, et ne laisse plus, pour chacun, qu'à développer les calculs qui lui sont propres.

La propriété de la tangente d'être la position limite d'une droite ayant sans cesse sur la ligne considérée un point fixe, accompagné d'un autre infiniment voisin, conduit directement à bien peu de choses, et n'est pas de celles dont le souvenir se forme et se fixe comme celui d'un attribut principal. J'ai donc renoncé à la prendre pour définition, lui ayant préféré celle d'avoir, à l'égard de la ligne, le caractère *osculateur* dont la conception n'est plus artificielle, et qui rend bien meilleur compte de toutes les autres propriétés. J'ai fait de même pour le plan tangent, dont la définition comme lieu de tangentes, nous montrerait sa nature étroite et détournée, si nos yeux n'étaient faussés par des habitudes trop anciennes et irréfléchies. De cette manière, ses analogies avec la tangente ne sont plus voilées.

Dans tous ses détails, j'ai présenté la théorie des figures enveloppes comme notre esprit arrive immédiatement à la concevoir et à la retenir, c'est-à-dire par les contacts de l'enveloppe avec ses enveloppées, non par les intersections de positions infiniment voisines de ces dernières. Le point de vue que j'abandonne ainsi n'est qu'un mauvais expédient ne rendant compte de rien, ne faisant pas même image. En outre, il est généralement faux, puisque ces intersections, qui existent rarement déjà quand

l'enveloppée est une ligne à un seul paramètre, font bien plus complètement défaut quand ses équations en contiennent deux.

Les propriétés si importantes des figures du premier degré en relation de perpendicularité (droites ou plans), ne se comprennent pas, dans leur essence, si l'on veut ne les rapporter qu'à la particularité, pour ces figures, de former des assemblages montrant à nos yeux telles inclinaisons plutôt que telles autres; mais l'obscurité se dissipe dès qu'on songe au caractère *conjugué* présenté par elles relativement au cercle ou à la sphère. C'est pourquoi j'ai rattaché directement la théorie des normales et plans normaux à la considération de ces derniers objets, presque aussi primordiaux que la droite et le plan dans toutes les sciences où la notion de l'espace intervient. Il m'a semblé que les trajectoires orthogonales ne pouvaient être mieux placées qu'à la suite.

Les propriétés des surfaces usuelles doivent succéder aux matières dont je viens de parler, puisqu'il s'y mêle celles des plans tangents, normales, figures enveloppes, etc., mais précéder la théorie des lignes courbes, dans laquelle quelques-unes de ces surfaces jouent un rôle important, d'où la place que je leur ai assignée. J'ai pu trop m'étendre sur l'application plane d'une surface développable; mais j'ai trouvé là une question fort importante en elle-même, susceptible d'une solution complète, conduisant à des calculs et rapprochements plus intéressants que cent autres détails dont la portée ne justifie pas la mode, méritant mieux, en un mot, que les brèves allusions dont on se contente presque toujours. Pour la première partie du théorème fondamental relatif à l'applicabilité, j'ai préféré la méthode de Gauss qui l'a démontrée le premier, à d'autres n'offrant pas moins de longueurs, ne conduisant pas comme celle-ci à la notion si curieuse et si importante de la *courbure totale* d'une surface. Sur ce dernier point, je crois avoir opéré quelques simplifications utiles, en arrivant, par exemple, à la mesure générale de cette courbure par des calculs plus clairs et rapides.

Les autres améliorations que je crois avoir apportées çà et là sont trop menues pour que je ne les passe pas sous silence. A ce Volume, comme aux précédents, on reprochera probablement son silence sur certaines matières et une sobriété excessive en fait de questions particulières. Certes, je suis bien éloigné de nier

l'importance propre de quelques-unes, envisagées en elles-mêmes ou dans leurs applications possibles, l'utilité d'autres, considérées comme illustrations didactiques des grandes propositions abstraites. Mais je m'abriterai toujours derrière la même excuse : l'espace ouvert à ma plume n'aurait pu les contenir, et j'ai dû le réserver avec parcimonie à mes théories générales dont j'avais surtout à cœur la complète exposition. Cette excuse me couvre assez pour m'enhardir à déclarer franchement que je ne pourrais corriger ce défaut convenablement, je veux dire en faisant mieux qu'une fade compilation, à moins d'efforts que la surface trop restreinte de mon savoir rendrait assez longs. Ce travail répugnerait en outre à mes goûts personnels, moins portés vers la masse, maintenant écrasante, des choses mathématiques dont on peut, presque impunément, négliger l'étude ou perdre le souvenir, que vers le nombre bien restreint de celles qui dominent toutes les autres, et je me sens plutôt heureux d'avoir été mis dans l'impossibilité de le faire. Mais si, prenant de plus en plus la faveur qui semble maintenant se dessiner pour elles, mes théories ont un jour la bonne fortune de servir de base aux études de la jeunesse, elles ne laisseront pas, je crois, une tâche très difficile à qui voudrait bien leur ajouter cet ornement.

Depuis un certain temps, un esprit tout autre qu'à l'époque où ma génération était sur les bancs, s'introduit dans les ouvrages écrits pour ceux qui nous y ont remplacés : la rigueur et la précision n'y sont plus méprisées, l'élégance y prend le dessus; par moments même, quoique avec timidité encore, perce l'idée que les séries entières pourraient bien être, jusqu'en Géométrie, la seule fondation solide à donner aux vérités mathématiques. Je crois avoir pris part à ce mouvement, mais il m'est permis de dire que je n'ai pas attendu sa naissance pour me mettre en marche. En particulier, et nonobstant son millésime, ce dernier Volume date réellement de vingt-sept années, car il reproduit à fort peu près mon cours public du deuxième semestre de l'année scolaire 1870-1871, que, depuis lors, je recommence périodiquement tous les deux ans.

Plus vivement et cordialement que jamais, puisque cette fois est la dernière, je remercie toutes les personnes, celles principalement dont j'ai prononcé les noms ici, qui, par leurs encou-

ragements, leur assistance, leur approbation, m'ont rendu cette longue tâche possible et agréable, m'ont aidé à la conduire à bonne fin ; de ce sentiment, je dois une expression plus spéciale à MM. Boudier et Collin, dont le gracieux empressement à m'aider dans la revision des épreuves a pu me donner l'illusion qu'il s'agissait pour eux d'un simple amusement. Pour ces amis de la veille, du jour et du lendemain, non moins que pour moi-même, je souhaite que les suffrages du Public puissent dire à plus haute voix que je n'ai pas travaillé sans tout profit pour la science et pour son enseignement.



LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

QUATRIÈME PARTIE.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES CLASSIQUES.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES. — RECTIFICATIONS. — QUADRATURES. — CUBATURES.

Généralités sur la représentation analytique des figures géométriques.

1. Les coordonnées *rectilignes* ont un caractère absolument fondamental qui les rend préférables à toutes autres, qui les impose même, dans l'édification de toutes les théories générales. D'abord elles seules impliquent exclusivement la considération de la droite et du plan, figures en quelque sorte primordiales dont l'importance absolue et relative est extrême, aussi bien en théorie que dans toutes les applications; elles seules encore donnent prise au théorème de Bézout dans l'étude des figures algébriques, en particulier dans la discussion de leurs intersections, etc.; enfin les formules générales qui sont assises sur elles sont les moins embarrassées d'éléments non algébriques, les plus symétriques, les plus uniformes, partant les plus faciles à manier et à interpréter, les plus aptes aussi à se prêter à des rappro-

chements intéressants. Toutes les autres coordonnées impliquent nécessairement, cela même dès leur définition, la considération de figures *courbes*, c'est-à-dire d'objets sur lesquels des notions bien nettes ne peuvent être acquises sans le secours de considérations analytiques ayant pour base leur représentation en coordonnées rectilignes. Nous emploierons donc exclusivement ces dernières, et nous placerons à part le peu que nous avons à dire sur les autres (Addition I, *inf.*).

Pour l'étude des propriétés purement *descriptives* des figures, il n'importe en rien que les axes aient été pris obliques ou rectangulaires, et même il vaut bien mieux ne rien spécifier à cet égard. Mais il en est tout autrement quand il s'agit de propriétés *métriques*, quand il y a par exemple à considérer des segments rectilignes appartenant à des droites non parallèles, des angles droits ou autres, etc., quand, en un mot, la *sphère*, le *cercle*, interviennent dans la question d'une manière apparente ou latente. Le choix d'axes rectangulaires apporte alors, à toutes les formules, de grandes simplifications dont il importe de s'assurer le bénéfice par leur adoption exclusive. Il en est ainsi dans les théories géométriques qui offrent le plus d'intérêt pratique et dans la presque totalité des applications mécaniques et physiques.

2. Les figures géométriques sont susceptibles de représentations analytiques variées, dont nous commencerons par analyser les principales, en les rattachant à celles qui sont préférées pour les figures algébriques.

Une *surface* peut d'abord être considérée comme le lieu géométrique des points de l'espace dont les coordonnées (rectilignes quelconques) x, y, z sont les systèmes de solutions réelles d'une équation finie donnée

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

à condition toutefois que $f(x, y, z)$ ne soit pas une fonction identiquement nulle, et que la résolution de cette équation fournisse pour quelqu'une des trois coordonnées une fonction au moins des deux autres, restant réelle pour toutes combinaisons de valeurs réelles de celles-ci comprises entre certaines limites.

Quand le premier membre f n'est fonction olotrope en aucun

point de la surface, c'est-à-dire pour aucun système de valeurs de x, y, z constituant les coordonnées d'un pareil point, on peut en général substituer à l'équation (1) une autre équivalente pour laquelle ceci n'a plus lieu; et de même (*Cf.* 322*) (¹), si les dérivées premières $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ s'évanouissaient toutes trois en tous les points de la surface. Nous sommes donc en droit de supposer à cette équation une forme telle, que *ces deux particularités ne se présentent qu'en des points exceptionnels de la surface, soit isolés, soit ayant pour lieu géométrique une certaine ligne* (8, *inf.*). Cela posé, nous appellerons *ordinaires* les points de la surface n'offrant aucune de ces particularités en question, et *singuliers* ces points exceptionnels offrant l'une ou l'autre, ceux encore qui sont *situés à l'infini* (*Cf.* 148** *et suiv.*).

Comme ainsi, en un point ordinaire, le premier membre de l'équation (1) est olotrope, sans que ses dérivées s'évanouissent toutes trois, *la résolution de cette équation, exécutée dans son voisinage, fournit toujours l'une au moins des trois coordonnées exprimée en fonction olotrope des deux autres* (307*). De cette propriété fondamentale dérivent toutes celles des surfaces en leurs points ordinaires, *auxquels seuls s'appliquent les théories générales et dont nous parlerons exclusivement, sauf mention du contraire.*

Mais rien de ces théories ne subsiste plus aux points singuliers qui doivent être étudiés par les moyens spéciaux à chaque cas (*Cf.* 149*, *in fine*). Il serait plus rationnel de les nommer des points *critiques*, car la discussion d'un pareil point montre assez souvent la possibilité de décomposer une région de la surface délimitée autour de lui en plusieurs autres pour quelques-unes desquelles il redevient ordinaire.

3. Il importe de remarquer que *cette distinction essentielle entre les points ordinaires et singuliers est indépendante du choix des axes.*

Tout changement de coordonnées rectilignes s'opère par des

(¹) Dans ce Volume, un numéro de renvoi se référera à la première Partie de l'Ouvrage, à la deuxième, à la troisième, ou à celle-ci, selon qu'il sera affecté d'un astérisque, de deux, de trois ou d'aucun.

formules de transformation linéaires

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x' + a_1\mathrm{x} + b_1\mathrm{y} + c_1\mathrm{z}, \\ y = y' + a_2\mathrm{x} + b_2\mathrm{y} + c_2\mathrm{z}, \\ z = z' + a_3\mathrm{x} + b_3\mathrm{y} + c_3\mathrm{z}, \end{cases}$$

x, y, z désignant les coordonnées du point (x, y, z) rapporté aux nouveaux axes, et $a_1, \ldots, c_3$ étant des constantes *dont le déterminant n'est pas nul.*

Cela posé, la nouvelle équation de la surface est

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 0,$$

f désignant la fonction de x, y, z composée avec la composante $f(x, y, z)$ et les fonctions simples (2). Or ces dernières étant linéaires, par suite indéfiniment olotropes, cette fonction jouit de la même propriété aussi longtemps que la composante f en jouit elle-même (248*). On a d'autre part

$$\frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{x}} = a_1\frac{df}{dx} + a_2\frac{df}{dy} + a_3\frac{df}{dz},$$

$$\frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{y}} = b_1\frac{df}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{z}} = c_1\frac{df}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il est donc certain que si l'on a numériquement

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = \frac{df}{dz} = 0,$$

on aura aussi au même point

$$\frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{x}} = \frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{y}} = \frac{d\mathrm{f}}{d\mathrm{z}} = 0;$$

et ces dernières égalités entraîneraient les précédentes, comme le montrerait de même le retour des nouveaux axes aux anciens.

4. En tirant de l'équation (1) une coordonnée par rapport à laquelle la dérivée de f ne s'évanouit pas, on obtient l'équation

$$(3)\qquad z = \mathrm{F}(x, y),$$

où F est une fonction olotrope de x, y dans le voisinage du point ordinaire considéré, et qui équivaut à la proposée (1).

C'est pour la surface (1) un *deuxième* mode de représentation dans lequel un point singulier est caractérisé par cette circonstance que la fonction $F(x, y)$ cesse d'y être olotrope; mais l'inverse n'a pas lieu nécessairement (*Cf.* 73, *inf.*).

5. En supposant que x, y sont deux coordonnées en fonction olotrope desquelles la troisième z peut être tirée de l'équation (1), en appelant p, q *deux* variables indépendantes auxiliaires et $\varphi(p, q)$, $\chi(p, q)$ deux fonctions olotropes quelconques de ces dernières, *dont le déterminant différentiel ne s'évanouit pas identiquement*, puis en posant

$$x = \varphi(p, q), \qquad y = \chi(p, q), \qquad F[\varphi(p, q), \chi(p, q)] = \psi(p, q),$$

cette fonction $\psi(p, q)$ est olotrope aussi, et, à cause de l'équation (3), les formules

$$(4) \qquad x = \varphi(p, q), \qquad y = \chi(p, q), \qquad z = \psi(p, q)$$

donnent pour x, y, z, et cela quelles que soient p, q, les coordonnées de points appartenant toujours à la surface. De plus elles peuvent donner les coordonnées d'un point quelconque par l'attribution à p, q de valeurs convenables; car l'hypothèse essentielle faite sur le déterminant différentiel des fonctions φ, χ assure la possibilité de résoudre les deux premières par rapport à p, q (307*).

Ces formules (4) constituent donc un *troisième* mode de représentation analytique de la surface (1); entre les mains de Gauss il a rendu pour la première fois de grands services dans des questions très difficiles.

Le deuxième mode (3) est renfermé à la fois dans celui-ci et dans le premier (1); car on peut évidemment substituer à l'équation unique (3) les trois formules

$$x = p, \qquad y = q, \qquad z = F(p, q),$$

comme on peut aussi la mettre sous la forme

$$z - F(x, y) = 0$$

analogue à (1), mais où z entre linéairement.

Du troisième mode on repasserait évidemment au premier par l'élimination de p, q entre les équations (4).

6. On notera que *dans les suites*

$$
\begin{array}{ccc}
l, & m, & n, \\
\dfrac{df}{dx}, & \dfrac{df}{dy}, & \dfrac{df}{dz},
\end{array}
$$

formées par les déterminants différentiels des couples (χ, ψ), (ψ, φ), (φ, χ) (*relativement à* p, q) *et par les dérivées de la fonction* f, *les termes correspondants sont en même temps nuls* (*numériquement*) *ou non.* Car la différentiation par rapport à p, q de l'identité

$$f(\varphi, \chi, \psi) = 0$$

donne

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dp} + \frac{df}{dy}\frac{d\chi}{dp} + \frac{df}{dz}\frac{d\psi}{dp} = 0, \\
\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dq} + \frac{df}{dy}\frac{d\chi}{dq} + \frac{df}{dz}\frac{d\psi}{dq} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

d'où

$$\frac{l}{\dfrac{df}{dx}} = \frac{m}{\dfrac{df}{dy}} = \frac{n}{\dfrac{df}{dz}},$$

parce que les trois dénominateurs ne s'évanouissent jamais en même temps (aux points ordinaires).

Les formules (4) donnent évidemment les coordonnées de points ordinaires d'une certaine surface quand on y prend pour φ, χ, ψ des fonctions olotropes quelconques, *offrant deux à deux des déterminants différentiels qui ne s'évanouissent pas en même temps.* Car si par exemple celui de φ, χ n'est pas nul, la résolution des deux premières fournit pour p, q des fonctions olotropes de x, y dont la substitution dans la troisième donne pour z aussi une expression de même nature. Les points singuliers de cette surface sont alors ceux où l'une au moins de ces fonctions entre dans une phase singulière, ou bien où leurs trois déterminants différentiels s'annulent en même temps.

7. Un plan est représenté par une équation linéaire, telle que

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

où l'on n'a pas à la fois $A = B = C = 0$, et aussi par

$$z = \alpha x + \beta y + \delta.$$

en supposant $C \neq 0$, ou bien encore, en prenant linéaires les fonctions indéterminées $\varphi(p, q)$, $\chi(p, q)$ ci-dessus, par les équations *toutes trois linéaires*

$$(5)\quad x = x_0 + \alpha' p + \alpha'' q, \qquad y = y_0 + \beta' p + \beta'' q, \qquad z = z_0 + \gamma' p + \gamma'' q.$$

Ici, x_0, y_0, z_0 représentent les coordonnées d'un point choisi arbitrairement sur le plan; et, en appelant λ, μ, ν les cosinus des angles formés par les axes associés deux à deux, puis en posant

$$\varepsilon(\alpha, \beta, \gamma) = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\lambda\beta\gamma + 2\mu\gamma\alpha + 2\nu\alpha\beta},$$

les quantités $\varepsilon(\alpha', \beta', \gamma')p$, $\varepsilon(\alpha'', \beta'', \gamma'')q$ sont les coordonnées du point (x, y, z) rapporté aux *deux* axes rectilignes tracés dans le plan par le point (x_0, y_0, z_0) dans les directions définies par les paramètres $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Car la première des équations (5), par exemple, écrite

$$x - x_0 = \frac{\alpha'}{\varepsilon(\alpha', \beta', \gamma')}[\varepsilon(\alpha', \beta', \gamma')p] + \frac{\alpha''}{\varepsilon(\alpha'', \beta'', \gamma'')}[\varepsilon(\alpha'', \beta'', \gamma'')q],$$

exprime que la projection du segment rectiligne allant de (x_0, y_0, z_0) à (x, y, z), faite sur l'axe des x parallèlement au plan des yz, est bien la somme des projections semblables de segments égaux à $\varepsilon(\alpha', \beta', \gamma')p$ et $\varepsilon(\alpha'', \beta'', \gamma'')q$, mesurés dans les sens voulus par leurs signes sur les deux axes définis tout à l'heure dans le plan considéré (*Cf.* 11, *inf.*).

8. Une *ligne* peut être considérée comme le lieu géométrique des points de l'espace dont les coordonnées rectilignes sont les systèmes de solutions réelles communes à deux équations finies données

$$(6)\quad \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

à condition que le système de ces équations soit réduit (319*), et que sa résolution fournisse, pour deux des coordonnées, une paire au moins de fonctions de la troisième, restant réelles pour toutes valeurs réelles de cette dernière comprises entre certaines limites. C'est ainsi le lieu des points communs aux deux surfaces représentées par chacune des équations (6) isolée de l'autre (2), c'est-à-dire l'*intersection* de ces surfaces.

Au système (6) on peut supposer une forme telle (*Cf.* 322*) que *l'un des premiers membres* f_1, f_2 *ne cesse d'être fonction olotrope de* x, y, z, *et aussi que leurs trois déterminants différentiels ne s'évanouissent à la fois qu'en des points exceptionnels de la ligne.*

Ces points exceptionnels, ceux aussi à l'infini, quand il existe des uns ou des autres, sont les points *singuliers* de la ligne (on dirait mieux *critiques*), et les théories générales y perdent complètement leur validité. Les autres sont les points *ordinaires, auxquels seuls s'appliquent ces théories*, et dont nous parlerons exclusivement quand il ne s'agira pas formellement des autres. Leur propriété essentielle, dont toutes les autres dérivent, est qu'*en chacun d'eux et dans son voisinage la résolution des équations* (6) *fournit toujours une paire de coordonnées au moins, exprimées en fonctions olotropes de la troisième* (307*).

On s'assurera facilement que la définition précédente équivaut à celle-ci : *un point de la ligne* (6) *est ordinaire quand il est tel pour chacune des surfaces* $f_1 = 0$ *et* $f_2 = 0$, *et que celles-ci n'y offrent pas un contact proprement dit* (61, *inf.*); *il est singulier quand il est tel pour l'une au moins de ces surfaces, ou sinon, quand elles y ont un contact* (*d'ordre* > 0).

Il faut remarquer encore que *cette distinction entre les points ordinaires et singuliers est indépendante du choix des axes.* Car d'une part, chacune des fonctions $\mathrm{f}_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, $\mathrm{f}_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, en lesquelles les substitutions (2) changent $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, est olotrope ou non en même temps que celle de même indice parmi ces dernières; d'autre part, des relations évidentes dont le type est

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\mathrm{f}_1}{d\mathrm{y}} & \dfrac{d\mathrm{f}_1}{d\mathrm{z}} \\ \dfrac{d\mathrm{f}_2}{d\mathrm{y}} & \dfrac{d\mathrm{f}_2}{d\mathrm{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dy} & \dfrac{df_1}{dz} \\ \dfrac{df_2}{dy} & \dfrac{df_2}{dz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dz} & \dfrac{df_1}{dx} \\ \dfrac{df_2}{dz} & \dfrac{df_2}{dx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx} & \dfrac{df_1}{dy} \\ \dfrac{df_2}{dx} & \dfrac{df_2}{dy} \end{vmatrix},$$

et les relations analogues pour le passage inverse des nouveaux axes aux anciens montrent que la nullité simultanée des trois

déterminants différentiels de f_1, f_2 entraîne la même nullité pour ceux de $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$, et qu'elle est réciproquement entraînée par celle-ci.

9. Le *deuxième* mode de représentation analytique de la ligne considérée est fourni par les équations

$$(7) \qquad \begin{cases} y = F_1(x), \\ z = F_2(x), \end{cases}$$

formées en tirant, du système (6), une de ces paires de coordonnées, y, z pour fixer les idées, par rapport auxquelles le déterminant différentiel de f_1, f_2 n'est pas nul numériquement (*Cf.* 81, *inf.*), équations où les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$ sont généralement olotropes aux points ordinaires.

Chacune des équations (7) prise isolément représente une surface cylindrique (144, *inf.*) dont les génératrices sont parallèles à l'axe de la coordonnée n'y entrant pas, et qui contient toute la ligne; celle-ci se présente ainsi comme constituant (en partie au moins) l'intersection de ces deux cylindres.

10. En supposant que x est une coordonnée en fonctions olotropes de laquelle les deux autres y, z peuvent être tirées des équations (6), en appelant t *une* variable auxiliaire et $\varphi(t)$ une fonction olotrope quelconque de celle-ci, *dont la dérivée première n'est pas identiquement nulle,* puis en posant

$$x = \varphi(t), \qquad F_1[\varphi(t)] = \chi(t), \qquad F_2[\varphi(t)] = \psi(t),$$

les fonctions $\chi(t)$, $\psi(t)$ sont olotropes aussi, et les équations (7) assurent aux formules

$$(8) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t)$$

la propriété de donner pour x, y, z, et cela quelle que soit t, les coordonnées d'un point appartenant à la ligne. Et comme à cause de $\varphi'(t) \neq 0$, la première peut être résolue par rapport à t (307*), ces mêmes formules peuvent fournir les coordonnées d'un point quelconque de la ligne (dans la région *ordinaire* considérée); elles constituent son *troisième* mode de représentation analytique.

Pour les mêmes raisons que ci-dessus (5), le deuxième mode (7) rentre à la fois dans celui-ci et dans le premier (6), et l'on retom-

berait sur le premier en éliminant t de deux manières entre les équations (8).

Dans le tableau

$$\begin{matrix} \dfrac{d\varphi}{dt}, & \dfrac{d\chi}{dt}, & \dfrac{d\psi}{dt}, \\ \Delta_x, & \Delta_y, & \Delta_z \end{matrix}$$

formé par les dérivées des fonctions φ, χ, ψ *et par les déterminants différentiels du système des fonctions* f_1, f_2, *pris par rapport aux couples* (yz), (zx), (xy) *respectivement, les éléments de chaque colonne sont en même temps nuls ou non.* Car la différentiation par rapport à t des identités

$$f_1(\varphi, \chi, \psi) = f_2(\varphi, \chi, \psi) = 0,$$

donne

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{df_1}{dx}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{df_1}{dy}\frac{d\chi}{dt} + \frac{df_1}{dz}\frac{d\psi}{dt} = 0, \\ \frac{df_2}{dx}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{df_2}{dy}\frac{d\chi}{dt} + \frac{df_2}{dz}\frac{d\psi}{dt} = 0. \end{aligned} \right.$$

D'où

$$\frac{\dfrac{d\varphi}{dt}}{\Delta_x} = \frac{\dfrac{d\chi}{dt}}{\Delta_y} = \frac{\dfrac{d\psi}{dt}}{\Delta_z},$$

parce que les trois dénominateurs ne s'évanouissent jamais en même temps (aux points ordinaires).

Les formules (8) représentent une région de points ordinaires appartenant à une certaine ligne, quand on y prend pour $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ des fonctions olotropes quelconques *dont les dérivées ne s'évanouissent pas toutes trois en même temps*. Car si l'on a $\varphi'(t) \neq 0$, par exemple, la résolution de la première fournit pour t une fonction olotrope de x dont la substitution dans les deux dernières donnent y, z exprimées aussi en fonctions olotropes de x. Les points singuliers sont alors ceux pour lesquels quelqu'une de ces fonctions cesse d'être olotrope, ou bien où l'on a simultanément

$$\varphi'(t) = \chi'(t) = \psi'(t) = 0.$$

Sous la restriction annexe, les mêmes formules (8) montrent qu'à des valeurs de t, inégales mais suffisamment voisines d'une valeur particulière t_0 de cette variable, correspondent des points de la ligne qui, eux aussi, sont nécessairement distincts (308*).

En particulier, les points obtenus en attribuant à t des accroissements infiniment petits, les uns positifs, les autres négatifs, forment sur la ligne deux régions dépourvues de tout point commun et donnant la notion des *deux sens ou directions opposés,* dans lesquels on peut marcher sur la ligne à partir de chacun de ses points ordinaires.

11. Une droite est représentée par deux équations linéaires simultanées telles que

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

où les déterminants des paires de colonnes de coefficients des coordonnées ne sont pas tous trois $= 0$, et aussi par

$$\begin{cases} y = \alpha_1 x + \delta_1, \\ z = \alpha_2 x + \delta_2, \end{cases}$$

en supposant $(B_1 C_2 - B_2 C_1) \neq 0$, ou bien encore par les équations *toutes trois linéaires*

$$x = x_0 + \alpha t, \qquad y = y_0 + \beta t, \qquad z = z_0 + \gamma t,$$

en prenant linéaire la fonction indéterminée $\varphi(t)$. Les quantités x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de quelque point de la droite, α, β, γ sont *ses paramètres de direction* (coordonnées de quelque même point pris sur sa parallèle menée par l'origine), et, semblablement à la conclusion du n° 7, la quantité $\varepsilon(\alpha, \beta, \gamma)t$ est la distance algébrique du point (x, y, z) au point *origine* (x_0, y_0, z_0), véritable coordonnée du premier point dans l'espace à *une* dimension que la droite occupe au milieu de l'espace proprement dit.

12. Ces trois modes de représentation analytique des figures géométriques (surfaces et lignes) sont les plus importants de beaucoup et sont employés tour à tour suivant les circonstances. D'une manière générale, le deuxième (3), (7) conduit aux calculs les moins chargés, et, à cause de cela, on le préfère toujours aux deux autres pour les applications numériques. Mais les formules qui en dérivent ont le grave inconvénient d'être dissymétriques par rapport aux coordonnées, en outre d'être habituelle-

ment illusoires quand les fonctions telles que $F(x, y)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ cessent d'être olotropes, ce qui peut arriver aux points ordinaires (*Cf.* 73, 81, *inf.*).

Les deux autres conduisent à des formules plus compliquées mais symétriques, par suite plus lumineuses et même plus facilement maniables. Ils sont préférables au deuxième pour les recherches théoriques, le troisième surtout (4), (8). Quant au premier (1), (6), il est employé presque exclusivement quand il s'agit de figures *algébriques*, c'est-à-dire représentables par des équations égalant à o des *polynômes entiers* par rapport aux coordonnées. Lui seul effectivement met ce caractère essentiel en pleine évidence.

Quand les déterminants différentiels des fonctions φ, χ, ψ pour une surface, ou bien leurs dérivées pour une ligne, s'annulent tous *numériquement* pour certaines valeurs particulières des variables auxiliaires, le point correspondant de la figure devient habituellement singulier, même si ces trois fonctions y demeurent olotropes. Le troisième mode offre ainsi cette propriété spéciale à remarquer, de permettre par l'emploi de fonctions néanmoins olotropes, l'étude des points singuliers de ce genre, qui, de tous, sont les plus fréquents et aussi les plus intéressants.

13. Il importe de noter que *les équations* (4) *ne représentent une surface, que sous la condition expresse, pour les fonctions* φ, χ, ψ, *de fournir deux à deux des déterminants différentiels non tous trois nuls identiquement.* Car si elles avaient leurs dérivées premières toutes identiquement nulles, elles se réduiraient à des constantes, et les équations considérées ne représenteraient qu'un point fixe. Si, ne les ayant pas telles, leurs trois déterminants s'évanouissaient identiquement, on pourrait certainement éliminer p, q une première fois entre deux de ces équations, une seconde fois entre deux autres, et il viendrait entre x, y, z un *système réduit* de *deux* équations représentant une ligne (317*).

Même observation pour les équations (8), qui, au lieu d'une ligne, représenteraient un simple point si l'on avait identiquement $\varphi'(t) = \chi'(t) = \psi'(t) = 0$.

De même encore pour les équations analogues à trois variables

auxiliaires p, q, r,

$$x = \varphi(p, q, r), \qquad y = \chi(p, q, r), \qquad z = \psi(p, q, r).$$

Si les dérivées premières de φ, χ, ψ sont toutes nulles identiquement, elles représentent un simple point fixe.

Si non, mais si chacun des couples (χ, ψ), (ψ, φ), (φ, χ) a ses trois déterminants différentiels nuls, elles représentent une ligne.

S'il n'en est pas ainsi, mais si le déterminant différentiel unique de ces trois fonctions s'évanouit identiquement, les mêmes équations représentent une surface. En réalité, comme toujours en apparence, elles représentent un point indéterminé de l'espace dans le cas seulement où ce dernier déterminant est $\neq 0$.

14. Nous avons vu implicitement (6) qu'une surface peut être considérée comme le lieu des points dont les coordonnées sont des fonctions données de deux indéterminées, données sous certaines conditions, ou bien, ce qui revient au même, qu'elle peut être représentée par *trois* équations contenant *deux* paramètres indéterminés. *Elle est encore aussi bien le lieu des points d'une ligne variable dont les deux équations*

$$(9) \qquad \begin{cases} f_1(x, y, z, a) = 0, \\ f_2(x, y, z, a) = 0 \end{cases}$$

renferment un paramètre indéterminé a. Car les points de l'espace pouvant appartenir à une pareille ligne se trouvent évidemment, et à l'exclusion de tous autres, sur la surface représentée par le résultat de l'élimination de a entre les équations (9).

C'est ce qu'on exprime géométriquement, en disant qu'*une surface peut être engendrée par le mouvement d'une ligne variable dépendant d'une seule indéterminée*. Relativement à la surface ainsi engendrée, la ligne mobile se nomme la *génératrice;* on nomme *directrice* toute ligne fixe (située bien entendu sur la surface) que la génératrice rencontre constamment, et qui la guide en quelque sorte dans son mouvement et sa déformation.

Cette manière d'envisager les surfaces aide beaucoup à la conception de leurs formes. Pour une surface donnée, on peut évidemment choisir la génératrice et les directrices d'une infinité de manières; mais on prend naturellement les lignes les plus simples

et les mieux connues qui puissent être tracées sur elle, par exemple des droites, des circonférences, si toutefois la nature des choses le permet.

Quand une surface peut être engendrée par une ligne droite on dit qu'elle est *réglée*. Tels sont les cylindres, cônes (143 *et suiv.*, *inf.*), et certaines surfaces du deuxième degré (toutes même si l'on voulait admettre des génératrices rectilignes imaginaires).

Pour la surface engendrée ainsi par la ligne (9), on obtient une représentation du troisième mode qui est souvent avantageuse, en exprimant arbitrairement l'une des coordonnées de son point courant en fonction de a considéré comme première variable auxiliaire et d'une seconde quelconque, puis en prenant les expressions semblables que la résolution des équations de la génératrice fournit pour les deux autres coordonnées.

15. La considération de la série de Taylor et de l'égalité

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

montre immédiatement (199*) que l'équation générale des surfaces passant par un point donné (x_0, y_0, z_0) est

$$(10)\quad (x - x_0)\varphi(x, y, z) + (y - y_0)\chi(x, y, z) + (z - z_0)\psi(x, y, z) = 0,$$

où φ, χ, ψ sont trois fonctions olotropes des coordonnées, entièrement arbitraires.

Il est facile aussi de former l'équation générale $f(x, y, z) = 0$ des surfaces qui contiennent la ligne représentée par les équations (6). Les déterminants différentiels des fonctions f_1, f_2 ne pouvant s'annuler tous trois qu'aux points singuliers de cette ligne, celui pris par rapport à y, z, pour fixer les idées, ne s'y évanouira pas quelle que soit x; la résolution des équations

$$f_1(x, y, z) = p_1, \qquad f_2(x, y, z) = p_2$$

fournira donc pour y, z des fonctions olotropes de x et des paramètres p_1, p_2, cela tout au moins pour des valeurs suffisamment petites de ceux-ci (307*), et la substitution de ces expressions changera $f(x, y, z)$ en une fonction olotrope de x, p_1, p_2 (248*).

Cette fonction composée $F(x, p_1, p_2)$ est développable par la

formule de Taylor à partir des valeurs de x, p_1, p_2 qui répondent à un point quelconque de la ligne donnée, c'est-à-dire à partir d'une valeur quelconque de x et de $p_1 = 0$, $p_2 = 0$. Mais comme elle doit s'évanouir en tous les points de la ligne, c'est-à-dire pour $p_1 = p_2 = 0$, quelle que soit x, son développement ne contient point de termes indépendants de p_1 et de p_2. On a donc identiquement

$$F(x, p_1, p_2) = \mathfrak{M}_1 p_1 + \mathfrak{M}_2 p_2,$$

$\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ désignant certaines fonctions olotropes de x, p_1, p_2 (199*).

Si donc on revient aux anciennes variables x, y, z en substituant f_1, f_2 à p_1, p_2, il vient

$$(11) \qquad f(x, y, z) = M_1 f_1 + M_2 f_2,$$

M_1, M_2 représentant maintenant des fonctions olotropes de x, y, z. Réciproquement, il est clair qu'en choisissant arbitrairement ces dernières fonctions et égalant à 0 l'expression (11), on obtient toujours l'équation d'une certaine surface contenant la ligne considérée.

Si les équations de la ligne étaient données sous la troisième forme (8), on obtiendrait évidemment la représentation du même genre pour les surfaces qui la contiennent, en prenant

$$x = \Phi(t, u), \qquad y = X(t, u), \qquad z = \Psi(t, u),$$

u représentant une seconde variable auxiliaire et Φ, X, Ψ trois fonctions de t, u, choisies arbitrairement sous la seule condition de se réduire à $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ pour $u = u_0$ par exemple.

16. Les équations générales d'une ligne passant par un point donné x_0, y_0, z_0 s'obtiennent évidemment en en accouplant deux de la forme (10).

Celles d'une ligne située entièrement sur la surface (1) supposée donnée ,e formeront en associant à cette équation celle d'une autre surface arbitraire.

Si la représentation analytique de la surface était donnée sous la troisième forme (3), on obtiendrait évidemment la même représentation des lignes tracées sur elle, en substituant à p, q dans les

formules (4) deux fonctions arbitraires $\varpi(t)$, $\varkappa(t)$ d'une même variable auxiliaire t.

Ou bien encore, ce qui revient au même, on pourrait assujettir p, q à vérifier une équation arbitraire

$$\aleph(p, q) = 0,$$

qui, convenablement choisie, représenterait dans un système de coordonnées spéciales toute ligne tracée sur la surface. Ici, cette ligne se présente évidemment comme lieu des intersections de la ligne

$$x = \varphi(p^{(0)}, q), \qquad y = \chi(p^{(0)}, q), \qquad z = \psi(p^{(0)}, q),$$

où q joue le rôle de variable auxiliaire unique, et qui varie sur la surface avec la valeur du paramètre $p^{(0)}$, par la ligne analogue

$$x = \varphi(p, q^{(0)}), \qquad y = \chi(p, q^{(0)}), \qquad z = \psi(p, q^{(0)}),$$

cela pour la relation

$$\aleph(p^{(0)}, q^{(0)}) = 0$$

établie entre les paramètres $p^{(0)}$, $q^{(0)}$ remplissant aussi les fonctions de véritables coordonnées.

17. Le rôle immense joué par le plan dans la Géométrie pure et aussi bien dans ses applications mécaniques et physiques donne une importance considérable aux lignes pouvant être tracées sur lui, que l'on nomme *planes* par opposition aux autres dites *gauches* ou bien encore à *double courbure* (192, *inf.*). Le plan d'une ligne plane étant l'une des surfaces qui la contiennent, on pourra former les équations d'une pareille ligne en combinant celle de ce plan avec celle d'une autre surface convenablement choisie (16).

Si le plan de la ligne coïncide avec celui des xy, il aura pour équation

$$z = 0,$$

moyennant quoi l'équation de l'autre surface

$$'f(x, y, z) = 0$$

pourra évidemment être remplacée par

$$'f(x, y, 0) = f(x, y) = 0,$$

ce qui donne dans le premier mode

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

pour la forme la plus simple des équations d'une ligne située dans le plan de xy.

Celles du deuxième mode seront évidemment

$$\begin{cases} y = F(x), \\ z = 0, \end{cases}$$

et celles du troisième

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = 0.$$

Quand il est bien sous-entendu qu'il s'agit exclusivement de lignes situées dans le plan des xy, on fait complètement abstraction de la dernière équation $z = 0$ dans ces trois formes; on remarquera d'après cela que les équations (7) considérées chacune isolément représentent, dans les plans des xy et des xz, les lignes planes, projections de la ligne de l'espace (6) par des droites parallèles aux axes des z et des y respectivement.

Les points ordinaires de la ligne plane

$$f(x, y) = 0$$

sont évidemment ceux où $f(x, y)$ est olotrope et $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ non toutes deux $= 0$; les autres sont singuliers (8).

Mesure des longueurs (courbes).

18. *Supposons qu'une ligne représentée en coordonnées rectangulaires par les équations*

(1) $$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t) \qquad (10)$$

n'ait aucun point singulier dont les coordonnées correspondent à des valeurs de t comprises entre les valeurs particulières invariables t_0, $T > t_0$, et, entre ces extrêmes, insérons g valeurs intermédiaires de t formant une suite

(2) $$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_g, \quad T,$$

où l'excès de chaque terme sur le précédent reste positif et

inférieur à une même variante positive l_g tendant vers zéro pour g infini. Si l'on nomme

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_g, \quad A,$$

les points de la ligne (1) *dont les coordonnées répondent aux valeurs* (2) *attribuées à t, et* $[a_0 A]_g$ *la longueur de la ligne brisée variable que l'on inscrit dans la proposée de* a_0 *à* A *en joignant chacun de ces points au suivant, on a toujours*

$$(3) \qquad \lim[a_0 A]_g = \int_{t_0}^{T} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

de quelque manière que l'on ait pu opérer.

En nommant indéfiniment t et $t + \Delta t$ deux termes consécutifs de la suite (2), puis x, y, z et $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ les coordonnées des points correspondants de la ligne considérée, la longueur du côté de la ligne brisée $[a_0 A]_g$ compris entre ces deux sommets est égale à

$$+\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

et la longueur totale de la même ligne à

$$\Sigma \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs (2) de t, sauf la dernière.

Comme x, y, z sont des fonctions de t essentiellement olotropes, la formule de Taylor donne

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \theta_x \Delta t^2, \qquad \Delta y = \frac{dy}{dt}\Delta t + \theta_y \Delta t^2, \qquad \Delta z = \frac{dz}{dt}\Delta t + \theta_z \Delta t^2,$$

θ_x, θ_y, θ_z désignant trois fonctions olotropes de t, Δt (199*), puis

$$(4) \qquad \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \theta \Delta t},$$

parce que Δt est toujours > 0, et θ est aussi une fonction olotrope de t, Δt.

Les points considérés sur la ligne (1) étant tous ordinaires, les dérivées $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ ne peuvent en aucun d'eux s'évanouir à la

fois (10), ni par suite la somme de leurs carrés puisque ce sont des quantités réelles; entre t_0, T, on peut donc assigner à cette somme quelque limite inférieure positive μ (186*). On peut de même assigner une limite supérieure à la valeur numérique de θ, pour toutes les valeurs de t, Δt sur lesquelles nous raisonnons (200*).

La quantité Δt étant infiniment petite, il arrive ainsi un moment où le dernier terme de l'expression sous le radical reste numériquement inférieur au trinôme qui le précède, moyennant quoi la formule du binôme (118**) devient applicable et donne

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\theta\,\Delta t}\\ &\quad=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}+\theta'\Delta t,\end{aligned}\right.$$

où il est évident que θ' est encore une fonction olotrope de t, Δt.

Maintenant, les relations (4), (5) conduisent à

$$\Sigma\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}=\Sigma\,\Delta t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}+\Sigma\,\theta'\Delta t^2,$$

et le dernier terme du second membre est infiniment petit, car il est évidemment inférieur à $\Theta(\mathrm{T}-t_0)l_g$. Θ représentant la limite supérieure assignable à la valeur numérique de θ'. Quant au premier terme, il a pour limite l'intégrale définie (3), ce qu'il nous suffit de constater (235*).

19. La limite de la ligne brisée variable, dont la formule (3) fournit la valeur, se nomme par définition la *longueur de l'arc* de la ligne (1) *compris entre les points* a_0, A. Habituellement, on se contente de dire que cette longueur est la limite d'une ligne brisée quelconque à côtés infiniment petits, inscrite dans cet arc; mais la condition d'être croissante que nous imposons à la suite (2) est nécessaire à l'existence d'une limite de valeur invariable. Si elle n'était pas remplie, la ligne brisée pourrait en quelque sorte revenir sur elle-même, et, quoique étant sans cesse inscrite dans l'arc, quoique ayant son plus grand côté infiniment petit, sa longueur pourrait tendre vers une limite quelconque, ou même n'en avoir aucune.

20. La longueur s de l'arc de la ligne (1) compris entre un point fixe a_0 et un point mobile m, prise positivement quand la différence $t - t_0$ a un signe déterminé, le signe $+$ par exemple, prise négativement quand $t - t_0$ a le signe opposé, c'est-à-dire selon que la marche de a_0 à m sur la ligne s'effectue dans un sens ou dans l'autre (10, *in fine*), est une fonction réelle de t donnée dans les deux cas par la formule

$$(6)\qquad s = \int_{t_0}^{t} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

On choisit souvent cette quantité pour variable auxiliaire substituée à t; c'est permis, car en vertu de l'équation différentielle évidente

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \chi'(t)^2 + \psi'(t)^2}},$$

où le radical ne peut s'évanouir, t est une fonction olotrope de s (303*) dont la dérivée ne s'évanouit jamais non plus (aux points ordinaires).

21. Quand on prend les équations de la ligne sous leur seconde forme (9), la formule devient

$$s = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Mais, quel que soit le choix de la variable auxiliaire, on a

$$(7)\qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

22. Dans les parties élevées des théories dont nous nous occupons, il y a souvent à considérer les arcs de lignes tracées sur une même surface, donnée sous le troisième mode de représentation

$$(8)\qquad x = \varphi(p, q), \qquad y = \chi(p, q), \qquad z = \psi(p, q),$$

par la substitution à p, q de fonctions données

$$(9)\qquad p = \varpi(t), \qquad q = \varkappa(t)$$

de la variable auxiliaire t intervenant dans le même mode de repré-

sentation de cette ligne (16). Comme alors on a immédiatement

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial q}\dfrac{dq}{dt}, \qquad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial\chi}{\partial p}\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{\partial\chi}{\partial q}\dfrac{dq}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial\psi}{\partial p}\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{\partial\psi}{\partial q}\dfrac{dq}{dt}, \end{cases}$$

la formule (6) donne pour l'arc S de cette ligne la relation

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + 2F\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} + G\left(\frac{dq}{dt}\right)^2},$$

que l'on écrit plus volontiers

$$(11)\qquad ds = \sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2},$$

où, pour abréger, on a posé

$$(12)\quad E = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2, \quad F = \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \ldots, \quad G = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2 + \ldots,$$

fonctions composées des fonctions simples (9) spécialisant la ligne, dont les composantes ne dépendent que de la nature de la surface.

On remarquera que le déterminant $EG - F^2$ est essentiellement positif. On a effectivement la formule évidente

$$(13)\qquad EG - F^2 = \mathfrak{l}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2,$$

$\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ représentant, comme au n° 6, les déterminants différentiels des fonctions φ, χ, ψ associées deux à deux, lesquels ne peuvent s'évanouir à la fois en aucun point ordinaire de la surface (8) (5).

23. *Le rapport, à une corde infiniment petite, de l'arc qu'elle sous-tend a pour limite* 1.

Si Δt, Δx, Δy, Δz sont les accroissements subis par t, x, y, z quand on passe d'une extrémité de la corde à l'autre, le rapport en question peut s'écrire (20)

$$\frac{\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_t^{t+\Delta t} dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}}.$$

Or le numérateur a pour limite la dérivée de l'intégrale (6)

par rapport à sa limite supérieure (196*), c'est-à-dire la valeur correspondante du radical placé sous le signe d'intégration (228*). Les fractions $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, ⋯ ont pareillement pour limites les dérivées $\frac{dx}{dt}$, ⋯; le dénominateur tend donc vers le même radical, et, comme il n'est pas nul, le rapport considéré tend vers 1.

24. Tout ce qui précède, nous le répétons, s'applique exclusivement aux parties de la ligne (1) qui ne contiennent que des points ordinaires. Quand il y a des points singuliers, l'intégrale (3) devient artificielle (238* *et suiv.*), et sa valeur, au cas qu'elle existe, définit alors et mesure la longueur de l'arc considéré.

25. Le cas d'une ligne plane est le plus simple de ceux dont nous parlions au n° 22. En prenant son plan pour celui des xy, les formules des n°s 20, 21 donnent immédiatement

$$s = \int_{t_0}^{t} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Toutes les formules de ce paragraphe se transformeraient aisément en coordonnées obliques, s'il n'y avait pas complication inutile à le faire (1).

26. Montrons encore une fois ici la représentation géométrique des fonctions circulaires à laquelle nous avons fait allusion quand nous nous sommes occupés d'elles (250**), et sur laquelle reposent beaucoup de formules de l'Analyse appliquée à la Géométrie.

Pour les équations du cercle de rayon $r \neq 0$,

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{14}$$

mises sous la troisième forme (17), on peut prendre

$$x = \varphi(t) = r\cos t, \qquad y = \chi(t) = r\sin t; \tag{15}$$

car les propriétés du sinus et du cosinus, *considérés comme fonctions purement analytiques* (231** *et suiv.*), entraînent, pour ces équations, celle de donner, par leur résolution, quelque

valeur de t restant réelle pour toutes les valeurs réelles de x, y qui sont les coordonnées d'un point du cercle, et $\varphi'(t) = -r\sin t$, $\chi'(t) = r\cos t$ ne peuvent jamais s'évanouir à la fois. Enfin la discussion de ces formules (235**) montre que le point (x, y) parcourt indéfiniment le cercle dans le sens de rotation direct (87**), quand t croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Cela posé, on trouve immédiatement, en supposant que s croît avec t,

$$ds = dt\sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = r\,dt,$$

d'où, en intégrant sous la condition $s = 0$ pour $t = 0$, c'est-à-dire pour $x = r$, $y = 0$,

$$s = rt,$$

moyennant quoi, les équations (15) peuvent s'écrire

$$x = r\cos\frac{s}{r}, \qquad y = r\sin\frac{s}{r}\cdot$$

Si maintenant on prend $r = 1$, on voit que *le cosinus et le sinus d'une variable réelle s sont les coordonnées de l'extrémité d'un arc de longueur s mesuré sur le cercle* (15) *à partir du point* (1, 0), *et cela dans le sens de rotation direct ou dans le sens rétrograde selon que* $s \gtrless 0$.

27. Nous appliquerons dès à présent la formule (6) à la solution de deux problèmes dont le second est d'un grand intérêt.

Entre deux points donnés

(16) $$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2),$$

tracer dans l'espace l'arc de longueur minimum.

En écrivant

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t)$$

les équations de la ligne inconnue où $\varphi(t)$, ... sont des fonctions indéterminées sous la seule restriction que, pour des valeurs données et invariables $t_1 \neq t_2$ de t, on ait

(17) $$\varphi(t_1) = x_1, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \varphi(t_2) = x_2, \quad \ldots, \quad \ldots;$$

on a à rendre minimum l'intégrale définie

(18) $$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Les formules des nos 100*** (et voisins) donnent ici

$$\mathfrak{X} = -\frac{d}{dt}\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \qquad \mathfrak{Y} = \ldots, \qquad \mathfrak{Z} = \ldots,$$

d'où, pour le minimum (*loc. cit.*, I),

$$(19) \quad \frac{d}{dt}\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \frac{d}{dt}\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \frac{d}{dt}\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = 0.$$

Comme $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $z' = \frac{dz}{dt}$ sont des fonctions réelles de t qui ne peuvent s'évanouir identiquement toutes trois, le radical jouit de la même propriété, et, en le représentant par Δ, ces équations, écrites

$$\Delta\frac{dx'}{dt} - \frac{d\Delta}{dt}x' = \Delta\frac{dy'}{dt} - \frac{d\Delta}{dt}y' = \Delta\frac{dz'}{dt} - \frac{d\Delta}{dt}z' = 0,$$

montrent que les déterminants du tableau

$$\begin{matrix} x', & y', & z', \\ \frac{dx'}{dt}, & \frac{dy'}{dt}, & \frac{dz'}{dt}, \end{matrix}$$

sont tous identiquement nuls, c'est-à-dire que x', y', z' sont proportionnelles à trois constantes (51***), qu'elles sont même égales à trois quantités de ce genre α, β, γ, si l'on profite de l'indétermination de $\varphi(t)$ par exemple (10) pour prendre cette fonction linéaire par rapport à t. Maintenant, l'intégration des équations

$$x' = \frac{dx}{dt} = \alpha, \qquad y' = \frac{dy}{dt} = \beta, \qquad z' = \frac{dz}{dt} = \gamma$$

conduit à

$$x = x_0 + \alpha t, \qquad y = y_0 + \beta t, \qquad z = z_0 + \gamma t.$$

Ce sont les équations d'une droite, dont les paramètres x_0, ..., α, ... se déterminent par les conditions (17) en même nombre. Celles-ci d'ailleurs entraînent $\delta t_1 = \delta x_1 = \ldots = \delta t_2 = \delta x_2 = \ldots = 0$, d'où satisfaction assurée d'avance à l'autre condition générale du minimum $\mathfrak{H} = 0$ (1).

---

(1) Cette solution ne serait évidemment qu'un cercle vicieux, si, comme autrefois, on prenait pour définition de la ligne droite cette même propriété *de tracer le plus court chemin entre deux quelconques de ses points*. Pour qu'il en soit

28. L'autre problème est celui-ci :

Entre les points (16) *marqués sur une surface donnée,*

(20) $$f(x, y, z) = 0,$$

tracer sur celle-ci un arc de longueur minimum.

Il faut toujours rendre minimum l'intégrale (18) sous les conditions aux limites (17) supposées compatibles avec l'équation (20), mais en outre sous la condition indéfinie exprimée par cette même équation (20) dont la différentiation de caractéristique δ donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0.$$

En représentant alors par ξ, η, ζ, pour abréger, les fonctions composées différentielles du premier ordre dont les dérivées figurent dans les équations (19), la première condition générale du minimum

$$\mathfrak{X}\,\delta x + \mathfrak{Y}\,\delta y + \mathfrak{Z}\,\delta z = 0$$

jointe à la précédente donnera, d'après le n° 100***, II,

(21) $$\frac{\dfrac{d\xi}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\dfrac{d\eta}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\dfrac{d\zeta}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

Ce sont deux équations différentielles, évidemment du second ordre par rapport aux fonctions inconnues x, y, z, se réduisant toutefois à une seule, à cause des relations évidentes

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df(x, y, z)}{dt} : \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = 0,$$

et $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, celle-ci donnant par différentiation

$$\xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt} + \zeta\frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Pour obtenir x, y, z, il y aura donc à choisir arbitrairement l'une de ces trois fonctions de t (10), puis à intégrer le système

---

autrement, il faut définir la ligne droite par ses propriétés *descriptives*, par exemple comme je l'ai fait dans mes *Nouveaux éléments de Géométrie* (Gauthier-Villars et fils).

mixte formé pour les deux autres par l'équation finie (20) et celle des équations différentielles (21) qu'il aura convenu de retenir. Les intégrales générales contiendront ainsi deux constantes arbitraires, à déterminer par la condition que la ligne correspondante passe bien par chacun des points donnés (16).

29. On nomme lignes *géodésiques* de la surface, toutes celles tracées sur elle de manière à satisfaire aux conditions nécessaires, mais *non suffisantes* (21), du minimum. En général, et d'après ce qui précède, *on peut faire passer une ligne géodésique par deux points pris arbitrairement sur la surface,* quelquefois plusieurs ou bien une infinité (cylindre à section droite fermée), pouvant même constituer (sur une sphère, entre des points diamétralement opposés) une suite continue; et, si tout arc minimum terminé à ces deux points appartient certainement à quelque ligne géodésique, *il n'est pas vrai qu'inversement tout arc d'une pareille ligne compris entre eux soit de longueur minimum.*

Toute droite traçable sur la surface en est évidemment une ligne géodésique, soit encore parce que, si l'on exprime linéairement en t les coordonnées de son point courant (11), elle donne $\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0$, ce qui procure satisfaction aux équations (21).

Quand, au contraire, une ligne géodésique est *courbe*, elle possède (sauf en des points exceptionnels) une *normale principale* (178, *inf.*) *dont les mêmes équations assurent la coïncidence constante avec la normale à la surface de même pied* (117, *inf.*). Effectivement, ξ, η, ζ étant précisément les cosinus directeurs de la tangente à la ligne (84, *inf.*), $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ sont proportionnelles à ceux de la normale principale (178, *inf.*), comme $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ le sont à ceux de la normale à la surface (118, *inf.*).

La normale principale étant située dans le plan osculateur à la ligne au même point (178, *inf.*), on exprime le même fait en disant que *le plan osculateur à la ligne géodésique ne cesse pas d'être normal à la surface.*

Quand il s'agit d'un simple plan, ses lignes géodésiques ne sont évidemment que l'ensemble des droites pouvant être tracées sur lui.

Mesure des aires [1].

30. *Si une ligne plane rapportée à des axes rectangulaires a pour équation du deuxième mode* (17)

$$(1) \qquad y = F(x),$$

où $F(x)$ *reste olotrope et positive de* $x = x_0$ *à* $x = X(> x_0)$, *la mesure* S *de l'aire plane limitée par le segment* $[x_0 X]$ *de l'axe des* x, *les ordonnées de la ligne répondant aux abscisses* x_0, X *et l'arc de la même ligne ayant pour extrémités celles de ces ordonnées est donnée par la formule*

$$(2) \qquad S = \int_{x_0}^{X} y\,dx = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

Nous supposerons pour fixer les idées que la fonction $F(x)$ croît sans cesse dans l'intervalle $[x_0 X]$; nous réunirons ces abscisses extrêmes par des abscisses intermédiaires variables formant avec elle une suite croissante

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots. \quad x_i, \quad \ldots, \quad x_g, \quad X,$$

où la différence de deux consécutives est inférieure à quelque variante l_g infiniment petite pour g infini, et auxquelles correspondent les ordonnées de la ligne

$$(3) \qquad y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_i (= F(x_i)), \quad \ldots, \quad y_g, \quad Y;$$

puis nous considérerons les rectangles, de surfaces

$$(4) \qquad y_0(x_1 - x_0), \quad \ldots, \quad y_i(x_{i+1} - x_i), \quad \ldots, \quad y_g(X - x_g),$$

ayant chacun pour hauteur une des ordonnées (3), sauf la dernière, et pour base le segment découpé sur l'axe des x par cette ordonnée et la suivante.

A cause de la croissance supposée à $F(x)$, l'aire limitée par l'axe des x, les ordonnées y_i, y_{i+1} et la ligne (1) surpasse celle du

[1] Dans ce paragraphe et dans le suivant, je pars, relativement aux aires planes et aux volumes, des notions premières exposées dans les Chap. X et XII de mes *Nouveaux éléments de Géométrie*.

rectangle $y_i(x_{i+1}-x_i)$, mais d'une quantité inférieure à

$$(y_{i+1}-y_i)(x_{i+1}-x_i).$$

En représentant donc indéfiniment par Δx, $\Delta F(x)$ le second facteur de ce produit et le premier, on a

$$S - \Sigma F(x)\Delta x < \Sigma \Delta F(x)\Delta x.$$

Mais la formule de Taylor donne $\Delta F(x) = \varphi(x, \Delta x)\Delta x$, où φ est une fonction olotrope de x, Δx, à la valeur numérique de laquelle on finit par pouvoir assigner une limite supérieure invariable M (199* *et suiv.*); le second membre de cette inégalité, finissant ainsi par être inférieur à $M(X - x_0)l_g$, tend vers zéro, le premier *a fortiori*, ce qui donne bien

$$S = \lim \Sigma F(x)\Delta x = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx \qquad (235^\star).$$

31. Quand $F(x)$ cesse d'être olotrope en quelque valeur de x non extérieure à l'intervalle $[x_0 X]$ (ce qui peut arriver même pour un point ordinaire), l'intégrale (2) devient artificielle (238* *et suiv.*), mais n'en fournit toujours pas moins, si elle existe encore, la mesure de l'aire considérée, que celle-ci existe par elle-même, ou bien par convention.

32. S'il s'agit d'une aire plane limitée par un enchaînement fermé d'arcs de lignes quelconques, des parallèles à l'axe des y, menées de manière à découper ce contour en parties dont chacune est représentable par une même équation de la forme (1), décomposent cette aire en une somme ou différence d'autres dont la formule (2) fournit immédiatement les mesures.

Rien n'empêche évidemment d'opérer une décomposition analogue par des parallèles à l'axe des x, ce qui conduit à des aires partielles dont chacune s'évalue en intégrant des différentielles de la forme $x\,dy$.

33. Si les axes étaient obliques, on aurait à considérer au lieu des rectangles mesurés par les expressions (4), des parallélogrammes ayant pour mesures les produits des mêmes quantités par l'aire du losange de côté $=1$ construit sur les axes, c'est-à-dire par $\sin\theta$, θ représentant l'angle des parties positives de

ceux-ci. La formule fondamentale (2) serait donc remplacée par

$$S = \sin\theta \int_{x_0}^{X} y\, dx$$

qui est à peu près inusitée.

34. *La mesure de l'aire plane définie au n° 32 est évidemment la limite de celle de l'aire d'un polygone variable inscrit dans son contour de manière que le périmètre de ce polygone ne se coupe jamais lui-même et que la longueur de son plus grand côté soit infiniment petite.*

35. La définition et l'évaluation des aires courbes sont fondées sur un théorème que nous énoncerons comme il suit :

Soient

$$(5) \qquad x = \varphi(p, q), \qquad y = \chi(p, q), \qquad z = \psi(p, q)$$

les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque m d'une surface, exprimées en fonctions de deux variables auxiliaires p, q (5) *dont nous représenterons chaque couple de valeurs par le point* n *ayant précisément* p, q *pour coordonnées relativement à des axes rectangulaires tracés dans un plan auxiliaire. Soit encore* E *une aire découpée dans ce plan par un contour de la nature de ceux définis au n°* 103***, *et supposons que la surface* (5) *n'offre aucun point singulier à l'intérieur de l'aire* E *(c'est-à-dire dont les coordonnées* x, y, z *soient des valeurs de* φ, χ, ψ *pour des valeurs de* p, q *égales aux coordonnées de quelque point* n *intérieur à l'aire* E).

Appelons maintenant indéfiniment n, n_1, n_2 *des groupes de trois points intérieurs à l'aire* E, *ayant pour coordonnées*

$$(p, q), \quad (p + \Delta_1 p, q + \Delta_1 q), \quad (p + \Delta_2 p, q + \Delta_2 q),$$

puis, supposons d'abord que tous les triangles e *ayant de pareils sommets soient contigus extérieurement sans laisser entre eux aucune solution de continuité, que le plus grand de leurs côtés soit infiniment petit, et que la ligne brisée limitant leur agglomération soit inscrite dans l'enceinte de l'aire* E, *ce qui donne* (34)

$$\lim \Sigma e = E,$$

Supposons enfin que l'on ait, indéfiniment aussi,

$$\Delta_1 p = \mu_1 h, \qquad \Delta_1 q = \nu_1 h,$$
$$\Delta_2 p = \mu_2 k, \qquad \Delta_2 q = \nu_2 k,$$

où, comme au n° 108***, *h, k sont des quantités infiniment petites et μ_1, ν_1, μ_2, ν_2, quatre quantités variables finies dont le déterminant $\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2 = 2\delta$ soit positif et toujours supérieur à quelque quantité positive invariable.*

Tout ceci bien entendu, si l'on nomme indéfiniment σ l'aire du triangle infiniment petit ayant pour sommets les points m, m_1, m_2 de la surface qui correspondent aux points n, n_1, n_2 de l'aire auxiliaire E, *on a, quelque ait été le procédé suivi,*

$$(6) \qquad \lim \Sigma\sigma = \iint dp\, dq \sqrt{\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2},$$

où $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ représentent les déterminants différentiels définis au n° 6, *où le radical doit être pris positivement, et où l'intégration double doit être exécutée à l'intérieur de l'aire* E (106***).

En représentant par σ_x la projection orthogonale du triangle σ sur le plan des yz et en raisonnant exactement comme au n° 108***, on trouve

$$\sigma_x = e(\mathfrak{l} + \theta_x),$$

où θ_x est une série entière en h, k, dont chaque terme contient soit h, soit k comme facteur et δ pour seul diviseur, puis des expressions semblables pour σ_y, σ_z, projections du même triangle sur les autres plans coordonnés. Il en résulte

$$\sigma = +\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} = e\sqrt{\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2 + \theta},$$

où θ est une quantité de même nature que θ_x, θ_y, θ_z, puis par la formule du binôme, ici applicable parce qu'on peut assigner à θ une limite supérieure infiniment petite, comme aussi une limite inférieure positive à la somme des trois carrés dont l'évanouissement simultané est impossible (6), (186*), (*Cf.* 18),

$$\sigma = e\left(\sqrt{\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2} + uh + vk\right),$$

u, v représentant comme au n° 108*** certaines fonctions de p, q, μ_1, ν_1, μ_2, ν_2, h, k qui demeurent olotropes pour toutes les valeurs de ces huit quantités étant à considérer.

Il suffit actuellement de recommencer le raisonnement final du numéro cité pour obtenir la formule (6) que nous voulions établir.

36. L'expression $\Sigma\sigma$ mesure évidemment l'aire de la surface polyédrique, à facettes triangulaires infiniment petites, qui a pour sommets les points ..., m, m_1, m_2, ... de la surface (5), qui est inscrite ainsi dans la *plaque* découpée sur cette surface par des arcs de lignes correspondant à ceux composant le contour de l'aire E, dont l'enceinte polygonale est inscrite en même temps dans celle curviligne de la plaque. La limite, de grandeur déterminée, que le théorème précédent assigne ainsi à cette aire variable, nonobstant l'indétermination considérable de ses formes successives, est par définition *l'aire de la plaque dont il s'agit.*

Mais les restrictions imposées par le second et le troisième alinéa de notre énoncé à l'indétermination de la déformation progressive de la surface polyédrique sont nécessaires à l'existence d'une même limite pour son aire [la seconde équivaut pour le plan passant par trois points tels que m, m_1, m_2 à la condition d'être infiniment voisin du plan tangent construit à la surface en l'un ou l'autre de ces points (72, *inf.*)].

Sans elles effectivement, la surface polyédrique pourrait rester plissée, à peu près comme le sont dans leurs entonnoirs les filtres de papier employés dans les analyses chimiques; elle pourrait encore se recouper indéfiniment elle-même, et son aire pourrait ainsi tendre vers une limite quelconque ou bien n'en avoir aucune (*Cf.* 19).

Quand la plaque de la surface (5) que nous considérons contient des points singuliers, l'intégrale double (6) devient *artificielle* (110***), mais définissant et mesurant toujours l'aire de cette plaque quand sa valeur n'est pas indéterminée.

37. Pour l'aire S d'une plaque de surface on obtient une expression dissymétrique, mais plus simple, partant plus appropriée aux calculs numériques, en adoptant le deuxième mode de représentation (4). On passe de la formule (6) à celle que nous avons en vue, en prenant

$$p = x, \qquad q = y, \qquad z = F(x, y).$$

d'où

$$\varphi(p, q) = x, \qquad \chi(p, q) = y, \qquad \psi(p, q) = \mathrm{F}(x, y),$$

et, par suite, en laissant la lettre z à la place de $\mathrm{F}(x, y)$

(7) $$\mathfrak{l} = -\frac{dz}{dx}, \qquad \mathfrak{m} = -\frac{dz}{dy}, \qquad \mathfrak{n} = 1,$$

puis finalement

$$\mathrm{S} = \iint dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Pour l'aire auxiliaire E définissant l'intégration, on peut prendre évidemment la projection orthogonale de la plaque considérée sur le plan des xy.

Mesure des volumes.

38. *Si une surface rapportée à des axes rectangulaires a pour équation du deuxième mode* (4)

(1) $$z = \mathrm{F}(x, y),$$

où $\mathrm{F}(x, y)$ *reste olotrope et positive aussi longtemps que les valeurs de* x, y *sont les coordonnées d'un point non extérieur à une aire donnée* A *délimitée dans le plan des* xy *comme nous l'avons expliqué au n°* 32, *la mesure* V *du volume limité par l'aire plane* A, *par l'enceinte cylindrique* (144, *inf.*) *ayant cette aire pour section droite avec des génératrices parallèles à l'axe des* z *et par la plaque que cette enceinte découpe sur la surface* (1) *est donnée par la formule*

(2) $$\mathrm{V} = \iint z\, dx\, dy = \iint \mathrm{F}(x, y)\, dx\, dy,$$

cette intégrale double étant prise précisément dans l'aire A (106***).

Appelons l_m une variante positive, infiniment petite pour m infini; puis, comme au n° 104***, imaginons des rectangles contigus, sans lacunes entre eux, dont les côtés parallèles aux axes des x et des y sont tous $< l_m$, et formant une agglomération limitée extérieurement par une ligne brisée dont les sommets *saillants* soient tous sur l'enceinte de l'aire A. Appelons encore indéfini-

ment α_m un de ces rectangles, z la plus petite des ordonnées de la surface (1) dont les pieds ne tombent pas au dehors des α_m, et ζ_m l'aire évidemment infiniment petite (30 *et suiv.*) de la zone limitée intérieurement par la ligne brisée ci-dessus, extérieurement par une ligne brisée de même nature, ayant ses sommets *rentrants*, placés sur l'enceinte de l'aire A. Appelons enfin $z + \Delta z$ la plus grande ordonnée de la surface dont le pied ne soit pas extérieur au rectangle α_m, puis Δx, Δy les accroissements subis par x, y dans le passage du pied de l'ordonnée z à celui de l'ordonnée $z + \Delta z$ et encore Φ une limite supérieure de la valeur de $F(x, y)$ pour toutes celles des x, y correspondant à un point du plan de xy non extérieur à l'aire $\mathcal{A}$ obtenue en bordant l'aire A d'une zone additionnelle assez mince pour que $F(x, y)$ y soit encore olotrope.

Le volume V surpasse $\Sigma z \alpha_m$, somme des volumes des parallélépipèdes rectangles ayant les rectangles α_m pour bases, les ordonnées z pour hauteurs, et, à partir du moment où l'aire ζ_m n'a plus de points extérieurs à l'aire $\mathcal{A}$, on a évidemment

$$V - \Sigma z \alpha_m < \Sigma \Delta z \alpha_m + \zeta_m \Phi.$$

Dans le second membre de cette inégalité le dernier terme $\zeta_m \Phi$ tend vers o comme ζ_m, et le premier aussi (*Cf.* 103***, II, *in fine*); car la formule de Taylor donne

$$\Delta z = \Delta F(x, y) = X \Delta x + Y \Delta y,$$

où, comme au numéro cité, Δx, Δy sont numériquement inférieurs à l_m et où X, Y sont des fonctions olotropes de $x, y, \Delta x, \Delta y$ pour toutes les valeurs de ces quatre quantités qui sont à considérer. On a donc

$$V = \lim \Sigma z \alpha_m,$$

ce qui équivaut à la formule (2) (106***).

39. Quand $F(x, y)$ cesse d'être olotrope pour quelque système de valeurs de x, y correspondant à un point non extérieur à l'aire A [ce qui n'est pas impossible, même pour des points ordinaires de la surface (1)], ou bien quand des points de l'enceinte de l'aire A sont singuliers pour les arcs qui les contiennent, l'intégrale double (2) devient artificielle (110***); mais, sa valeur, si elle existe, fournit toujours la mesure du volume V en cas qu'il

existe aussi, ou bien elle la définit par convention quand cela n'a pas lieu géométriquement parlant.

40. Pour évaluer un volume limité par une enveloppe composée de plaques de surfaces se raccordant les unes aux autres suivant des arcs de leurs lignes d'intersections, il suffit de le décomposer, additivement et soustractivement, par des surfaces cylindriques à génératrices toutes parallèles à un même axe coordonné. Chaque volume partiel a la forme considérée au n° 38, et sa mesure est donnée par la formule (2).

41. L'obliquité des axes apporte une très légère modification à cette même formule qui d'ailleurs est alors inusitée.

Le volume du parallélépipède élémentaire qui tout à l'heure avait pour mesure $z\alpha_m = z\,\Delta x\,\Delta y$ est représenté maintenant par l'expression $(z\cos N)(\Delta x\,\Delta y\sin\nu) = \Theta z\,\Delta x\,\Delta y$, où ν, N, par suite Θ, désignent l'angle compris entre les parties positives des axes des x et des y, l'angle compris entre la partie positive de l'axe des z et la demi-perpendiculaire élevée du même côté qu'elle sur le plan des xy, et le volume du parallélépipède équilatéral de côtés $= 1$ construit sur les axes. On a donc

$$V = \Theta \iint z\,dx\,dy;$$

mais, pour la définition de l'intégration double, il faut évidemment substituer à l'aire A une aire A' dont chaque point intérieur ait pour coordonnées, relativement à quelque système d'axes *rectangulaires,* les coordonnées *obliques* de chaque point intérieur à l'aire A.

CHAPITRE II.

CONTACTS EN GÉNÉRAL.

Définition et premières propriétés d'un contact entre deux figures.

42. Quand, en un certain point commun, les fonctions jouant les mêmes rôles dans la représentation analytique de deux figures sont égales numériquement, elles-mêmes et toutes leurs dérivées respectivement, elles le sont identiquement (189*), et les figures considérées coïncident. Cette égalité numérique, quand elle a lieu seulement jusqu'à un ordre plus ou moins élevé, n'assure plus sans doute la coïncidence complète des figures; mais entre elles, et dans le voisinage immédiat de ce point, elle entraîne une parité plus ou moins marquée de forme et de position, une sorte de coïncidence approximative, qui constitue le *contact* envisagé dans son essence générale. C'est une notion de la plus haute importance, qui intervient dans presque toutes les propositions de la Géométrie pure et appliquée, qui, en particulier, sera désormais le thème principal de nos recherches.

43. Nous dirons que les deux surfaces

$$(1)\qquad x = \varphi_1(p, q), \qquad y = \chi_1(p, q), \qquad z = \psi_1(p, q),$$

$$(2)\qquad x = \varphi_2(p, q), \qquad y = \chi_2(p, q), \qquad z = \psi_2(p, q),$$

représentées l'une et l'autre de la troisième manière (5) ont un *contact d'ordre k* pour les valeurs particulières $(p^{(0)}, q^{(0)})$ des variables auxiliaires, ou mieux au point correspondant alors commun, si, pour $p = p^{(0)}$, $q = q^{(0)}$ les fonctions φ_1, χ_1, ψ_1 et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement sont numériquement égales aux fonctions φ_2, χ_2, ψ_2 et à leurs dérivées semblables.

L'entier k est l'ordre *effectif* du contact quand l'égalité numérique en question n'a plus lieu entre toutes les dérivées d'ordre $k+1$; il n'en est que l'ordre *apparent* quand elle persiste plus ou moins loin au delà de l'ordre k. Si les fonctions (1), (2) étaient égales numériquement en $p=p^{(0)}$, $q=q^{(0)}$, elles-mêmes mais non toutes leurs dérivées premières, on aurait $k=0$, et les surfaces auraient un simple point commun, sans contact proprement dit. Mais il y a quelquefois avantage à dire qu'elles ont alors un contact d'ordre $=0$.

L'existence d'un contact proprement dit exigeant que les mêmes déterminants différentiels des fonctions φ, χ, ψ y soient en même temps nuls ou non pour les deux surfaces, exige aussi que les mêmes dérivées premières des premiers membres de leurs équations du premier mode s'évanouissent ou non en même temps (6).

A cause de la nature linéaire des formules servant à exécuter une transformation de coordonnées rectilignes (3), *l'existence d'un contact d'ordre (effectif) k entre deux surfaces est une relation évidemment indépendante du choix des axes.*

44. *Quand les surfaces* (1), (2) *offrant ainsi un contact d'ordre effectif* $k(>0)$ *sont représentées au moyen de deux autres variables auxiliaires* P, Q *par d'autres équations quelconques*

$$(3)\qquad x=\Phi_1(P,Q),\qquad y=X_1(P,Q),\qquad z=\Psi_1(P,Q),$$

$$(4)\qquad x=\Phi_2(P,Q),\qquad y=X_2(P,Q),\qquad z=\Psi_2(P,Q),$$

dans lesquelles toutefois deux fonctions dont le déterminant différentiel ne s'évanouit pas au point de contact, Φ_1, X_1, *par exemple, y sont, elles et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement au moins, numériquement égales aux mêmes quantités pour* Φ_2, X_2, *la même égalité a lieu pour* Ψ_1, Ψ_2 *jusqu'à l'ordre k aussi. Mais elle n'a pas lieu plus loin si, pour* Φ_1, X_1 *d'une part,* Φ_2, X_2 *d'autre part, l'égalité supposée se prolonge plus ou moins au delà de l'ordre k.*

La propriété de ne pas s'évanouir au point considéré, que nous supposons au déterminant différentiel de Φ_1, X_1 et qui appartient par suite à celui de Φ_2, X_2, assure à l'autre coordonnée z la pro-

priété d'être fonction olotrope de x, y pour chacune des deux surfaces considérées et par suite aux déterminants différentiels de φ_1, χ_1 et de φ_2, χ_2 celle de ne pas s'évanouir non plus au même point (5).

Cela posé, on obtiendra évidemment les fonctions $\Psi_1(P, Q)$, $\Psi_2(P, Q)$, en tirant successivement p, q, en fonctions implicites de P, Q, des deux systèmes

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi_1(p, q) = \Phi_1(P, Q), \\ \chi_1(p, q) = X_1(P, Q); \end{cases} \qquad (5\ bis)\quad \begin{cases} \varphi_2(p, q) = \Phi_2(P, Q), \\ \chi_2(p, q) = X_2(P, Q), \end{cases}$$

et portant respectivement leurs deux couples de valeurs dans les troisièmes fonctions $\psi_1(p, q)$, $\psi_2(p, q)$.

Or, en vertu de la théorie des fonctions implicites (311*), les valeurs prises au point considéré par les dérivées de p, q tirées des équations (5) sont égales jusqu'à l'ordre k inclusivement à celles des dérivées de p, q tirées des équations (5 *bis*), parce que les unes et les autres dépendent seulement des dérivées partielles des mêmes ordres, des fonctions figurant dans ces équations, dérivées qui, de part et d'autre respectivement, sont toutes égales numériquement au point considéré, par hypothèse pour les fonctions Φ, X, à cause du contact supposé pour les fonctions φ, χ. Il en résulte que les dérivées, d'ordre égaux ou inférieurs à k, des fonctions composées $\psi_1(p, q)$, $\psi_2(p, q)$ sont aussi respectivement égales au même point; car elles dépendent des dérivées de mêmes ordres de p, q considérées comme fonctions implicites simples de P, Q, dont nous venons de constater l'égalité au point en question, de celles aussi des composantes $\psi_1(p, q)$, $\psi_2(p, q)$, qui sont égales jusqu'au même ordre en vertu du contact supposé (254*).

Si enfin, pour les dérivées des fonctions (3), (4), l'égalité numérique en question persistait dans l'ordre $k+1$, l'ordre effectif du contact des surfaces serait $\geq k+1$ (43), au lieu d'être précisément égal à k.

45. Ce théorème permet évidemment de reconnaître si deux surfaces ont un contact en un point donné, et de supputer son ordre effectif.

Comme, en supposant z fonction olotrope de x, y pour chacune

des surfaces, on peut les représenter par

$$x = x, \qquad y = y, \qquad z = F_1(x, y),$$
$$x = x, \qquad y = y, \qquad z = F_2(x, y),$$

où les fonctions Φ_1, X_1 sont en fait identiques à Φ_2, X_2 *l'ordre effectif du contact sera l'ordre maximum jusqu'auquel inclusivement les fonctions* F_1, F_2 *et leurs dérivées seront numériquement égales.* C'est le moyen le plus simple de l'évaluer.

46. *Pour que les surfaces*

$$f_1(x, y, z) = 0,$$
$$x = \varphi_2(p, q), \qquad y = \chi_2(p, q), \qquad z = \psi_2(p, q),$$

aient un contact d'ordre effectif $k (> 0)$, il est nécessaire et suffisant, que pour les valeurs correspondantes de p, q et jusqu'à l'ordre k mais non au delà, la fonction composée de p, q,

$$f_1(\varphi_2, \chi_2, \psi_2),$$

et toutes ses dérivées s'évanouissent numériquement.

I. Si les surfaces ont un contact d'ordre k, la première peut être représentée aussi par des équations

$$(6) \qquad x = \varphi_1(p, q), \qquad y = \chi_1(p, q), \qquad z = \psi_1(p, q),$$

où *le contact est mis en évidence,* c'est-à-dire où, au point considéré et jusqu'à l'ordre k, les fonctions φ_1, χ_1, ψ_1 et leurs dérivées sont numériquement égales à φ_2, χ_2, ψ_2 et à leurs dérivées semblables (44); et l'identité évidente

$$(7) \qquad f_1(\varphi_1, \chi_1, \psi_1) = 0$$

entraîne en particulier, pour les valeurs de p, q répondant au point considéré, les égalités numériques

$$D_{p,q}^{(m,n)} f_1(\varphi_1, \chi_1, \psi_1) = 0 \qquad (m + n \leqq k).$$

On a donc au moins aussi les égalités numériques de mêmes ordres

$$(8) \qquad D_{p,q}^{(m,n)} f_1(\varphi_2, \chi_2, \psi_2) = 0 \qquad (m + n \leqq k).$$

puisque dans $f_1(\varphi_1, \chi_1, \psi_1)$, $f_1(\varphi_2, \chi_2, \psi_2)$, fonctions composées

de p, q, les composantes f_1 sont identiques, et que, jusqu'à l'ordre k, les fonctions simples φ_1, χ_1, ψ_1 et leurs dérivées sont numériquement égales aux fonctions simples φ_2, χ_2, ψ_2 et à leurs dérivées pour les valeurs considérées de p, q (254*).

II. Si ce sont les égalités numériques (8) qui sont supposées avoir lieu, nous admettrons pour fixer les idées que $\frac{df_1}{dz}$ ne s'évanouit pas au point considéré, d'où, en raisonnant comme au n° 6, nous conclurons d'abord, des deux égalités de ce genre existant dans le premier ordre, que le déterminant différentiel de φ_2, χ_2 ne s'y évanouit pas non plus. Ensuite, nous représenterons la première surface par les équations (6) en choisissant φ_1, χ_1 de manière que pour les valeurs de p, q en question il y ait égalité numérique jusqu'à l'ordre k entre ces fonctions et leurs dérivées d'une part, φ_2, χ_2 et leurs dérivées d'autre part.

Cela posé, comme ψ_1 est précisément la racine de l'équation (7), l'existence des égalités (8), combinée avec la théorie des fonctions implicites (311*), assurera à cette troisième fonction et à ses dérivées d'ordres $\overline{\gtrless} k$ la propriété de coïncider numériquement au point considéré avec ψ_2 et ses dérivées, d'où l'existence en ce point d'un contact d'ordre k au moins entre les deux surfaces.

47. *Quand deux surfaces ayant un contact d'ordre k sont représentées par les équations* (1), (2) *mettant ce contact en évidence, les différences des coordonnées de mêmes noms des points de l'une et de l'autre qui correspondent aux mêmes valeurs de p, q, sont des infiniment petits d'ordres au moins égaux à $k+1$ par rapport aux accroissements Δp, Δq, à attribuer à ces variables auxiliaires pour passer du point de contact à ceux dont il s'agit* (195*).

Car, par définition, les développements de φ_1, ..., φ_2, ... par la formule de Taylor coïncident respectivement jusqu'à l'ordre k inclusivement. Ceux des différences $(\varphi_2 - \varphi_1)$, ... ne contiennent donc que des termes effectifs de degrés $k+1$ au moins par rapport à Δp, Δq.

Il en résulte que *le carré de la distance de deux points correspondants est un infiniment petit d'ordre $2(k+1)$ par rapport*

à Δp, Δq; car le carré en question est une expression homogène et de degré 2 par rapport aux différences $(\varphi_2 - \varphi_1)$, ... *La distance considérée elle-même est donc un infiniment petit d'ordre $k+1$*, si toutefois elle est fonction olotrope de Δp, Δq, ce qui n'a pas lieu habituellement.

Par exemple, si les surfaces sont représentées par les équations

$$z = F_1(x, y), \qquad z = F_2(x, y),$$

où les fonctions F_1, F_2 sont olotropes au point de contact, *le segment qu'elles interceptent sur une parallèle à l'axe des z infiniment voisine de celle qui passe par le point de contact est un infiniment petit d'ordre $k+1$ par rapport à Δx, Δy.* La plupart des auteurs adoptent cette propriété pour définition du contact.

48. *Si deux surfaces* S_1, S_2 *ont chacune au même point un contact d'ordre k avec une même troisième* S, *elles offrent en ce point un contact mutuel d'ordre k au moins.*

Pour ces trois surfaces on peut effectivement poser

$$x = \varphi_1(p, q), \quad \ldots; \qquad x = \varphi_2(p, q), \quad \ldots; \qquad x = \varphi(p, q), \quad \ldots$$

où les fonctions φ_1, χ_1, ψ_1, et φ_2, χ_2, ψ_2 ainsi que leurs dérivées d'ordres $\leqq k$ prennent au point de contact des valeurs numériques égales respectivement à celles de φ, χ, ψ (44). En ce point les fonctions φ_1, χ_1, ψ_1 et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k au moins sont donc égales à φ_2, χ_2, ψ_2 et à leurs dérivées semblables; d'où l'existence du contact annoncé entre les deux premières surfaces.

49. Nous dirons de même qu'entre les deux lignes

$$(9) \qquad x = \varphi_1(t), \qquad y = \chi_1(t), \qquad z = \psi_1(t),$$

$$(10) \qquad x = \varphi_2(t), \qquad y = \chi_2(t), \qquad z = \psi_2(t)$$

il y a *un contact d'ordre effectif k* au point (alors commun) correspondant à la valeur $t^{(0)}$ de la variable auxiliaire t, quand, pour $t = t^{(0)}$, mais non au delà de l'ordre k, les fonctions φ_1, χ_1, ψ_1 et toutes leurs dérivées prennent des valeurs numériques respectivement égales à celles de φ_2, χ_2, ψ_2 et de leurs dérivées.

L'existence d'un contact proprement dit, c'est-à-dire d'ordre

effectif > 0, exige ainsi que, pour $t = t^{(0)}$, les dérivées premières des mêmes fonctions φ, χ, ψ soient en même temps nulles ou non. Elle exige par suite (10) que les déterminants différentiels semblables des premiers membres des équations des deux lignes dans le premier mode de représentation (8) soient en même temps nuls ou non nuls au point de contact.

Comme pour deux surfaces, un contact entre deux lignes constitue une relation mutuelle qui est indépendante du choix des axes.

50. Nous nous contenterons d'énoncer les propositions suivantes qui ressemblent beaucoup à leurs pendants dans la théorie des surfaces et se démontrent de la même manière.

I. *Quand les lignes* (9), (10), *offrant un contact d'ordre effectif* k, *sont représentées par des équations*

$$x = \Phi_1(T), \qquad y = X_1(T), \qquad z = \Psi_1(T),$$
$$x = \Phi_2(T), \qquad y = X_2(T), \qquad z = \Psi_2(T),$$

où, au point de contact, les fonctions Φ_1, Φ_2, *ayant leurs dérivées premières non nulles, sont numériquement égales, elles et leurs dérivées d'ordre* $\leq k$, *les fonctions* X_1, Ψ_1 *jouissent de la même propriété relativement aux fonctions* X_2, Ψ_2 *respectivement, et cela non au delà de l'ordre* k *s'il en était ainsi pour* Φ_1 *et* Φ_2. (*Cf.* 44.)

II. *Si donc on représente les mêmes lignes par les équations*

$$\begin{cases} y = {}'F_1(x), \\ z = {}''F_1(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} y = {}'F_2(x), \\ z = {}''F_2(x), \end{cases}$$

les fonctions ${}'F_1$, ${}''F_1$ *et leurs dérivées sont, au point de contact, numériquement égales aux mêmes quantités pour la seconde ligne, cela jusqu'à l'ordre* k *inclusivement mais non au delà.* (*Cf.* 45.)

D'où résulte un procédé évident pour constater l'existence d'un contact entre deux lignes, évaluer en même temps son ordre effectif.

III. *Pour que les lignes*

$$\begin{cases} {}'f_1(x, y, z) = 0, \\ {}''f_1(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

et

$$x = \varphi_2(t), \quad y = \chi_2(t), \quad z = \psi_2(t)$$

aient un contact d'ordre effectif $k(>0)$, *il faut et il suffit que, pour la valeur correspondante de* t *et jusqu'à l'ordre* k *mais non au delà, les deux fonctions composées de* t

$${}'f_1(\varphi_2, \chi_2, \psi_2), \quad {}''f_1(\varphi_2, \chi_2, \psi_2)$$

et toutes leurs dérivées s'évanouissent simultanément. (*Cf.* 46.)

IV. *Quand deux lignes ayant un contact d'ordre* k *sont représentées par les équations* (9), (10) *mettant cette relation en évidence, les différences des coordonnées de mêmes noms de points correspondants sur l'une et l'autre sont des infiniment petits d'ordres* $k+1$ *au moins par rapport à l'accroissement* Δt *subi par* t *dans le passage du point de contact à ceux que l'on considère.* (*Cf.* 47.)

Le carré de la distance de deux points correspondants étant évidemment ainsi un infiniment petit d'ordre effectif $2(k+1)$, *cette distance elle-même,* qui est visiblement une fonction olotrope de Δt, *est un infiniment petit d'ordre* $k+1$ *par rapport à cet accroissement.*

En particulier, *le segment rectiligne compris entre les traces sur les deux lignes, d'un plan parallèle à deux coordonnées qui sont fonctions olotropes de la troisième, est un infiniment petit d'ordre* $k+1$ *par rapport à la variation de cette troisième coordonnée dans le passage du point de contact à ces deux traces.*

V. *Si deux lignes ont chacune et au même point un contact d'ordre* k *avec une même troisième, elles offrent en ce point un contact mutuel d'ordre* k *au moins.* (*Cf.* 48.)

51. Il est bon de remarquer qu'*on met toujours en évidence un contact d'ordre quelconque* k, *existant entre deux lignes, quand on exprime les coordonnées du point de chacune d'elles*

en fonction de l'arc dont il est l'extrémité, mesuré à partir du point de contact et muni d'un signe convenable (20).

Considérons en effet les lignes représentées par les équations (9), (10) mettant déjà ce contact en évidence; mesurons sur elles des arcs de longueurs égales à la valeur absolue de s, cela dans les sens où t croît ou dans les sens opposés (10, *in fine*), selon que le signe de s est $+$ ou $-$, et appelons t_1, t_2 les valeurs de t qui correspondent aux extrémités de ces arcs. Les équations différentielles

$$\frac{dt_1}{ds} = \frac{1}{+\sqrt{\varphi_1'(t_1)^2 + \ldots}}, \qquad \frac{dt_2}{ds} = \frac{1}{+\sqrt{\varphi_2'(t_2)^2 - \ldots}}$$

ont lieu, et, combinées soit avec les conditions initiales

$$t_1 = t_2 = t^{(0)}$$

pour $s = 0$, soit avec l'égalité numérique existant pour

$$t_1 = t_2 = t^{(0)},$$

jusqu'à l'ordre k inclusivement, entre les fonctions $\varphi_1(t_1)$, ..., et leurs dérivées d'une part, les fonctions $\varphi_2(t_2)$, ... et leurs dérivées d'autre part, elles montrent qu'une égalité semblable a lieu aussi, pour $s = 0$ et jusqu'à l'ordre k, entre t_1, t_2 considérées comme fonctions de s et leurs dérivées. Cette dernière égalité subsiste donc encore, pour les mêmes causes combinées avec la théorie des fonctions composées, entre $\varphi_1(t_1)$, ..., $\varphi_2(t_2)$, ... et leurs dérivées considérées toutes maintenant comme des fonctions composées de s; c'est ce que nous avions à constater.

Sur deux lignes offrant un contact d'ordre $k > 0$, on appelle *identiques* les directions (*loc. cit.*) dans lesquelles il faut ainsi mesurer deux arcs de même longueur à partir de ce point pour que le théorème précédent ait lieu. D'après ceci et une remarque antérieure (50, IV), *la distance des extrémités d'arcs de même longueur s infiniment petite portée sur les deux lignes dans la même direction, est un infiniment petit d'ordre* $k+1$ *par rapport à s.*

52. Quand il s'agit de lignes planes situées dans un même plan

pris pour celui des xy, la disparition de la troisième coordonnée z simplifie beaucoup les formules relatives au contact.

Deux lignes de ce genre auront un contact d'ordre k, quand on pourra les représenter par des équations

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \chi_1(t),$$
$$x = \varphi_2(t), \qquad y = \chi_2(t),$$

où les fonctions φ_1, χ_1 d'une part, φ_2, χ_2 d'autre part, et leurs dérivées d'ordres $\leqq k$ prennent les mêmes valeurs numériques pour la valeur de t répondant au point considéré; ou bien encore quand, pour cette valeur de t, la substitution des coordonnées du point courant de l'une dans l'équation de l'autre (premier mode) fait de son premier membre une fonction composée de t s'évanouissant avec toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement; ou bien enfin quand, dans les équations

$$y = \mathrm{F}_1(x), \qquad y = \mathrm{F}_2(x)$$

des deux lignes, les fonctions F_1, F_2 (supposées olotropes) et leurs dérivées jusqu'à celles d'ordre k prennent des valeurs respectivement égales pour la valeur de x répondant au point considéré.

Dans ce dernier cas, le segment intercepté par les deux lignes sur une parallèle à l'axe des y est infiniment petit d'ordre $k+1$ par rapport à l'excès de l'abscisse de cette parallèle sur celle du point de contact.

53. *Quand, en un même point, trois lignes de ce genre ont la seconde avec la première un contact d'ordre k_1, et la troisième avec la même un contact d'ordre effectif $k_2 > k_1$, les points de cette troisième infiniment voisins du contact tombent tous au dehors de la région du plan comprise entre les deux premières.*

Car, en appelant y, y_1, y_2 les ordonnées de ces trois lignes supposées fonctions olotropes de x, les différences $y_1 - y$, $y_2 - y$ sont par rapport à Δx des quantités infiniment petites d'ordres $k_1 + 1$, et $k_2 + 1 > k_1 + 1$. Si donc les signes finaux de ces différences sont identiques, la dernière finit par surpasser numériquement la première, et, dans le voisinage du contact, la seconde ligne passe entre la première et la troisième; si ces signes sont diffé-

rents, c'est évidemment la première ligne qui passe entre les deux autres.

En cas de contact d'ordres inégaux en un même point, la même disposition topographique se réalise pour trois lignes tracées sur une même surface; et cela aussi pour trois surfaces deux à deux dépourvues dans le voisinage du contact de tout autre point commun; mais nous ne pouvons insister.

34. La notion de contact entre deux figures de variétés différentes (surface et ligne) dérive de la double observation qui suit.

Une surface et une ligne étant données, si sur la première on peut tracer quelque ligne ayant un contact d'ordre k avec la seconde, on peut réciproquement par la seconde faire passer quelque surface ayant avec la première un contact d'ordre k au moins; et cette dernière possibilité, quand elle existe, assure inversement la première.

En représentant par

(11) $$x = \varphi_1(t), \quad y = \chi_1(t), \quad z = \psi_1(t)$$

la ligne de la surface donnée, ayant par hypothèse avec la ligne donnée

(12) $$x = \varphi_2(t), \quad y = \chi_2(t), \quad z = \psi_2(t)$$

un contact d'ordre k mis en évidence par ces deux systèmes d'équations, la surface aura des équations de la forme

(13) $$x = \Phi_1(t, u), \quad y = X_1(t, u), \quad z = \Psi_1(t, u),$$

où, pour la valeur particulière $u^{(0)}$ par exemple de la seconde variable auxiliaire, ces trois fonctions se réduisent respectivement à $\varphi_1(t)$, $\chi_1(t)$, $\psi_1(t)$ (15). Si donc le contact d'ordre k existant par hypothèse entre les lignes (11), (12) a lieu pour $t = t^{(0)}$, on peut évidemment, cela même d'une infinité de manières, assigner trois fonctions olotropes de t, u, savoir $\Phi_2(t, u)$, $X_2(t, u)$, $\Psi_2(t, u)$, jouissant en $t = t^{(0)}$, $u = u^{(0)}$ de la triple propriété : d'être elles et leurs dérivées d'ordres $\leq k$ par rapport à t seulement numériquement égales aux dérivées semblables de Φ_1, X_1, Ψ_1, c'est-à-dire à celles de φ_1, χ_1, ψ_1 par suite à celles de φ_2, χ_2, ψ_2,

d'avoir toutes leurs dérivées par rapport à t seulement d'ordres $> k$ égales aussi à celles de ces mêmes fonctions φ_2, χ_2, ψ_2 d'avoir enfin toutes leurs autres dérivées d'ordres totaux $\leq k$ égales aux dérivées semblables de Φ_1, X_1, Ψ_1. Moyennant quoi, il est clair que la surface

$$(14) \qquad x = \Phi_2(t, u), \qquad y = X_2(t, u), \qquad z = \Psi_2(t, u)$$

contient entièrement la ligne proposée (12), et qu'au point considéré elle offre un contact d'ordre k au moins avec la surface proposée (13).

Supposons en second lieu que la surface passant par la ligne donnée (12) et offrant par hypothèse un contact d'ordre k avec la surface donnée soit représentée par les équations (14), où

$$\Phi_2(t, u^{(0)}) = \varphi_2(t), \qquad X_2(t, u^{(0)}) = \chi_2(t), \qquad \Psi_2(t, u^{(0)}) = \psi_2(t);$$

la surface donnée aura des équations de la forme (13) mettant ce contact en évidence; la ligne

$$x = \Phi_1(t, u^{(0)}), \qquad y = X_1(t, u^{(0)}), \qquad z = \Psi_1(t, u^{(0)}),$$

située sur cette surface, aura donc un contact d'ordre k au moins avec la ligne donnée (12), au point qui, sur l'une et sur l'autre, correspond à la valeur $t^{(0)}$ de t.

Nous exprimerons l'existence, jusqu'à l'ordre maximum k, de la double possibilité faisant l'objet de ce théorème, en disant que *la surface et la ligne en question offrent un contact d'ordre effectif k au point commun où elle a lieu.*

De même qu'entre deux lignes identiques ou entre deux surfaces qui coïncident, il est clair d'après cela qu'une ligne et une surface peuvent être considérées comme offrant un contact d'ordre illimité en chaque point de la première, quand celle-ci est située tout entière sur la seconde.

55. Parmi les diverses manières d'exprimer l'existence d'un contact d'ordre k entre deux figures de variétés différentes, nous noterons seulement celle se rapportant au cas où la surface est représentée par l'équation du premier mode

$$f_1(x, y, z) = 0$$

et la ligne par les équations du troisième mode (12).

La condition nécessaire et suffisante est que la fonction composée de t

$$(15) \qquad f_1(\varphi_2, \chi_2, \psi_2)$$

s'évanouisse avec toutes ses dérivées d'ordres $\leq k$ *pour la valeur* $t^{(0)}$ *de t répondant au point de contact.*

Si en effet les équations (11) représentent une ligne susceptible d'être tracée sur la surface avec un contact d'ordre k mis en évidence entre elle et la ligne donnée (12), l'identité

$$f_1(\varphi_1, \chi_1, \psi_1) = 0$$

assure en particulier la nullité, jusqu'à l'ordre k, des valeurs prises en $t = t^{(0)}$ par la fonction composée $f_1(\varphi_1, \chi_1, \psi_1)$ et par ses dérivées. Mais ces valeurs sont numériquement égales aux mêmes quantités pour la fonction composée (15) à cause de l'identité des composantes et de l'égalité numérique existant en $t = t^{(0)}$ et jusqu'à l'ordre k entre φ_1, χ_1, ψ_1 d'une part et φ_2, χ_2, ψ_2 d'autre part; donc, etc. On prouvera tout aussi facilement que la condition dont il s'agit est suffisante.

56. *Quand deux surfaces ont un contact d'ordre k, toute ligne ayant au même point un contact du même ordre avec la première (ou bien,* a fortiori, *tracée sur elle par ce point) offre aussi, avec la seconde, un contact d'ordre k au moins.*

Car, par cette ligne, on peut faire passer une surface offrant un contact d'ordre k au moins avec la première surface donnée, avec la seconde aussi par suite (54), (48).

57. *Réciproquement, si toutes les lignes tracées sur une surface par un même point offrent un contact d'un même ordre k avec une autre surface, un contact d'ordre k existe aussi entre ces deux surfaces, au point considéré.*

Soient

$$x = \varphi_1(p, q), \qquad y = \chi_1(p, q), \qquad z = \psi_1(p, q)$$

les équations de la première surface appartenant au troisième mode, et p_0, q_0 les valeurs particulières des variables auxiliaires

qui fournissent le point considéré, puis

$$f_2(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la seconde surface appartenant au premier mode; posons en outre

$$(16)\quad f_2(\varphi_1, \chi_1, \psi_1) = \mathrm{F}(p, q) = \mathrm{H}_{0,0} + \mathrm{H}_{1,0}(p - p_0) + \mathrm{H}_{0,1}(q - q_0) + \ldots,$$

en développant cette fonction composée de p, q par la série de Taylor à partir des valeurs initiales p_0, q_0, et traçons sur la première surface (16) les lignes seulement que l'on obtient en faisant

$$(17)\qquad p = p_0 + at, \qquad q = q_0 + bt,$$

où a, b sont des coefficients indéterminés.

Les valeurs pour $t = 0$ des dérivées d'ordres $0, 1, 2, \ldots, k$ de la fonction *doublement* composée de t que l'on forme en faisant les substitutions (17) dans la fonction (16) *simplement* composée de p, q, sont, sauf certains facteurs numériques, les quantités

$$\mathrm{H}_{0,0},$$
$$\mathrm{H}_{1,0}a + \mathrm{H}_{0,1}b,$$
$$\mathrm{H}_{2,0}a^2 + \mathrm{H}_{1,1}ab + \mathrm{H}_{0,2}b^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{H}_{k,0}a^k + \mathrm{H}_{k-1,1}a^{k-1}b + \ldots + \mathrm{H}_{0,k}b^k,$$

et les contacts d'ordre k, dont l'existence est supposée, entraînent la nullité de toutes ces expressions, quelles que soient les valeurs attribuées à a, b (0, 0 exceptées) (55). Il faut donc, puisqu'il s'agit de polynômes entiers en a, b, que tous leurs coefficients $\mathrm{H}_{0,0}$, $\mathrm{H}_{1,0}$, ..., $\mathrm{H}_{0,k}$, c'est-à-dire les valeurs prises en p_0, q_0, à des facteurs numériques près, par les dérivées d'ordres $\overline{\gtrless} k$ de la fonction composée (16), s'évanouissent. D'où résulte bien (46) l'existence d'un contact d'ordre k entre les deux surfaces, au point dont il s'agit.

58. *Quand deux lignes ont un contact d'ordre k, toute surface ayant au même point un contact du même ordre avec la première (ou bien,* a fortiori, *passant par elle) offre aussi avec la seconde un contact d'ordre k au moins.*

Car, sur cette surface, on peut tracer, par le point de contact, une ligne offrant un contact d'ordre k au moins avec la première ligne donnée et, par suite, avec la seconde (54), (50, V).

59. *Toute ligne ayant en un même point un contact d'ordre k avec deux surfaces prises séparément, offre un contact d'ordre k aussi avec leur intersection, au même point (supposé ordinaire pour cette dernière).*

Si, en effet,

$$x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t),$$

$$f_1(x, y, z) = 0,$$
$$f_2(x, y, z) = 0$$

sont les équations de la ligne et des surfaces considérées, chacune des deux fonctions composées de t, $f_1(\varphi, \chi, \psi)$, $f_2(\varphi, \chi, \psi)$, et ses dérivées d'ordre $\leq k$ s'évanouissent au point de contact en vertu de l'hypothèse (55). Or la coexistence de ces deux groupes d'égalités numériques est précisément la condition requise pour l'existence du contact annoncé entre la ligne et l'intersection des surfaces données (50, III).

Cette proposition subsiste, à plus forte raison, dans le cas où la ligne donnée est située tout entière sur l'une des deux surfaces.

60. *Si deux surfaces s_1, s_2 ont respectivement des contacts d'ordre commun k avec deux autres surfaces S_1, S_2, la ligne l, intersection des deux premières, offre au même point un contact d'ordre k aussi avec l'intersection L des deux dernières (si toutefois le point considéré est ordinaire pour chacune des intersections l, L).*

Car la ligne l, étant située sur la surface s_1 et passant par un contact d'ordre k de cette surface avec S_1, a aussi un contact d'ordre k avec cette dernière (56); pour la même raison elle a un contact d'ordre k aussi avec S_2; elle a donc un contact de même ordre avec la ligne L, intersection de S_1, S_2 (59).

61. Sauf le cas où les deux figures sont algébriques, les équations du contact relatives au premier mode de représentation

employé pour l'une et l'autre sont à peu près inusitées. Celles assurant l'existence d'un contact du premier ordre au moins en un point que l'on sait d'autre part être commun aux deux figures sont toutefois à noter à cause de leur simplicité et de leur utilité.

Il faut et il suffit que les coordonnées de ce point commun annulent les déterminants différentiels des premiers membres des équations des deux figures (associés trois à trois quand ils sont au nombre de quatre).

I. Soient les deux surfaces

$$f_1(x, y, z) = 0,$$
$$f_2(x, y, z) = 0,$$

et

$$x = \varphi_2(p, q), \qquad y = \chi_2(p, q), \qquad z = \psi_2(p, q),$$

les équations de la seconde écrites dans le troisième mode. La combinaison des conditions

$$\frac{d}{dp} f_1(\varphi_2, \chi_2, \psi_2) = 0,$$
$$\frac{d}{dp} f_2(\varphi_2, \chi_2, \psi_2) = 0,$$

qui sont remplies au point de contact, la seconde par elle-même, la première d'après le n° 46, avec les conditions semblables

$$\frac{d}{dq} f_1(\varphi_2, \chi_2, \psi_2) = 0,$$
$$\frac{d}{dq} f_2(\varphi_2, \chi_2, \psi_2) = 0,$$

et avec la non-nullité simultanée des déterminants différentiels des trois fonctions φ_2, χ_2, ψ_2 associées deux à deux (5), (6), conduit immédiatement pour le point de contact aux trois égalités

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dy} & \frac{df_1}{dz} \\ \frac{df_2}{dy} & \frac{df_2}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dz} & \frac{df_1}{dx} \\ \frac{df_2}{dz} & \frac{df_2}{dx} \end{vmatrix} = \ldots = 0.$$

II. Pour deux lignes représentées par les paires d'équations

$$\begin{cases} 'f_1(x, y, z) = 0, \\ ''f_1(x, y, z) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 'f_2(x, y, z) = 0, \\ ''f_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

on prouvera de la même manière (50, III) que les déterminants différentiels par rapport à (x, y, z) de trois quelconques des quatre fonctions $'f_1$, $''f_1$, $'f_2$, $''f_2$ s'évanouissent tous au point de contact.

III. Pour une surface et une ligne représentées par

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad \begin{cases} 'f_2(x, y, z) = 0, \\ ''f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

on prouvera toujours de la même manière (55) que le déterminant différentiel des trois premiers membres f_1, $'f_2$, $''f_2$ prend la valeur 0 au point de contact.

Contact entre deux figures, considéré comme disposition limite de contacts d'ordres moindres en des points infiniment voisins. — Figures osculatrices en général.

62. *Quand les équations d'une surface et d'une ligne renferment des paramètres a, b, ... en nombre et à titre tels, qu'on puisse en disposer de manière à faire acquérir sans cesse à ces figures, en g points mobiles distincts m_1, m_2, ..., m_g, des contacts d'ordres constants donnés ($\geqq 0$) k_1, k_2, ..., k_g, puis, que ces paramètres varient de telle sorte que chacune des figures tende vers une position limite et que les points mobiles se rapprochent tous indéfiniment d'un même point donné m, les figures considérées offrent, en m, dans leurs positions limites, un contact d'ordre*

$$K = (k_1 + k_2 + \ldots + k_g) - (g - 1)$$

au moins.

L'existence de contacts d'ordres k_1, k_2, ..., k_g entre la surface

$$(1) \qquad f(x, y, z, a, b, \ldots) = 0,$$

et la ligne

$$(2) \quad x = \varphi(t, a, b, \ldots), \qquad y = \chi(t, a, b, \ldots), \qquad z = \psi(t, a, b, \ldots),$$

aux points de celle-ci correspondant aux valeurs inégales t_1, t_2, ..., t_g de la variable auxiliaire t, est assurée (55) par les

$$K + 1 = (k_1 + 1) + (k_2 + 1) + \ldots + k_g + 1)$$

équations de condition

$$
\begin{array}{ll}
[D_t^\mu f(\varphi, \chi, \psi, a, b, \ldots)]_{t=t_1} = 0, & (\mu = 0, 1, 2, \ldots, k_1),\\
[D_t^\mu f(\varphi, \chi, \psi, a, b, \ldots)]_{t=t_2} = 0, & (\mu = 0, 1, 2, \ldots, k_2),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
[D_t^\mu f(\varphi, \chi, \psi, a, b, \ldots)]_{t=t_g} = 0, & (\mu = 0, 1, 2, \ldots, k_g),
\end{array}
$$

d'où nous supposerons qu'on peut tirer $K+1$ des paramètres a, b, ... en fonctions olotropes des autres l, ... et de $t_1, t_2, \ldots, t_g$ quantités restant ainsi, les unes et les autres, entièrement indéterminées. Après quoi, la substitution des expressions ainsi obtenues aux $K+1$ paramètres en question change la fonction composée $f(\varphi, \chi, \psi, a, b, \ldots)$ en une autre $\mathfrak{f}(t, t_1, t_2, \ldots t_g, l, \ldots)$ jouissant, quelles que soient $t_1, t_2, \ldots, t_g, l, \ldots$, de la propriété de s'annuler pour $t = t_i$ généralement, elle-même et ses k_i premières dérivées par rapport à t.

On a donc identiquement (6**)

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{f}(t, t_1, t_2, \ldots, t_g, l, \ldots)\\
&\quad = (t-t_1)^{k_1+1}(t-t_2)^{k_2+1}\ldots(t-t_g)^{k_g+1}\,\dot{\mathfrak{f}}(t, t_1, \ldots, t_g, l, \ldots),
\end{aligned}
$$

où $\dot{\mathfrak{f}}(t, t_1, t_2, \ldots, t_g, l, \ldots)$ représente une autre fonction olotrope de toutes les quantités dont elle dépend. Si donc $t_1, t_2, \ldots, t_g$ tendent vers une même limite τ, et en même temps l, ... vers des limites λ, ..., on aura

$$\mathfrak{f}(t, \tau, \tau, \ldots, \tau, \lambda, \ldots) = (t-\tau)^{K+1}\dot{\mathfrak{f}}(t, \tau, \tau, \ldots, \tau, \lambda, \ldots);$$

pour $t = \tau$, par suite, le premier membre de cette relation s'annule certainement avec ses K premières dérivées par rapport à t. Il en résulte évidemment qu'en appelant $\alpha, \beta, \ldots$ les limites de a, b, ..., la surface, position limite de (1), ayant pour équation

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \ldots) = 0,$$

offre avec la ligne limite de (2), représentée par

$$x = \varphi(t, \alpha, \beta, \ldots), \qquad y = \chi(t, \alpha, \beta, \ldots), \qquad z = \psi(t, \alpha, \beta, \ldots),$$

un contact d'ordre K au moins, au point de cette ligne limite répondant à la valeur τ de t.

63. *Le même théorème subsiste, en remplaçant par une*

seconde ligne variable la surface mentionnée dans son énoncé.

Car, en faisant passer par cette seconde ligne deux surfaces variables aussi, n'y offrant mutuellement aucun contact (d'ordre > 0), elles-mêmes et leurs positions limites, chacune d'elles aura avec la première ligne des contacts d'ordres $k_1, \ldots, k_g$ en $m_1, \ldots, m_g$ (58); il y aura donc un contact d'ordre K, en m, entre les positions limites de chacune de ces deux surfaces et celle de la première ligne (62), par suite (59) entre la position limite de la seconde ligne, intersection de celles des deux surfaces, et celle de la première ligne.

64. La proposition de ce genre qui intéresse deux surfaces est infiniment moins simple; nous pouvons toutefois en énoncer le cas particulier suivant :

Quand deux surfaces variables ont sans cesse trois points communs, répondant aux couples

$$(3) \qquad (p, q), \quad (p + \Delta_1 p, q + \Delta_1 q), \quad (p + \Delta_2 p, q + \Delta_2 q)$$

de valeurs des variables auxiliaires communes intervenant dans leur représentation du troisième mode (5), *et si d'une part* p, q *tendent vers les limites* p_0, q_0, *si d'autre part les quatre accroissements* $\Delta_1 p, \ldots$ *sont des formes relatives spécifiées au n° 35, les positions limites de ces surfaces, quand elles en sont pourvues, offrent un contact d'ordre* 1 *au moins, en leur point commun répondant aux valeurs* p_0, q_0 *des variables auxiliaires.*

On peut dire aussi que le contact précité existe entre les positions limites des surfaces, *quand les trois points mobiles qui ont pour coordonnées les paires de quantités* (3) *construites sur deux axes rectilignes auxiliaires ont des positions limites non situées sur une même droite.* Cette observation semble indiquer la voie à suivre pour étendre à deux surfaces les propositions des numéros précédents.

65. Pour $k_1 = k_2 = \ldots = k_g = 0$, les propositions des n°s 62, 63 ont un corollaire utile à retenir. *On peut certainement faire*

naître un contact d'ordre k entre une ligne ou une surface indéterminées d'une part, et une ligne déterminée quelconque d'autre part, en tout point donné sur celle-ci, si les paramètres arbitraires de la figure variable entrent dans ses équations en nombre et d'une manière tels, qu'il soit possible de la faire passer par $k+1$ points indéterminés de la ligne fixe.

66. Des figures de même variété sont dites fréquemment former une *famille*, quand la représentation analytique de chacune s'obtient par la simple attribution de valeurs particulières convenables à des paramètres, dans une ou deux équations (que nous supposons du premier mode pour fixer les idées) dont les premiers membres sont des fonctions *déterminées* de ces paramètres et des coordonnées.

Si l'équation générale (ou les équations) d'une famille de figures renferme les paramètres d'une manière telle, que ceux-ci puissent être déterminés et le soient tous exactement par la condition que la figure particulière correspondante offre avec une figure donnée (de l'une ou l'autre variété) et en un point donné de celle-ci le contact le plus élevé (d'ordre > 0) que les circonstances rendent possible, on nomme cette figure particulière la figure *osculatrice* de la famille considérée, à la figure donnée et au point en question.

67. En se reportant aux n°s 43 et suivants on voit immédiatement que l'existence d'un contact d'ordre k entre une surface indéterminée et une surface donnée en un point donné de celle-ci exige $1+2+\ldots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{1.2}$ conditions. *Pour qu'une famille de surfaces puisse fournir des surfaces osculatrices à une surface donnée, il faut donc avant tout que le nombre de ses paramètres soit triangulaire.* Telle est par exemple celle formée par tous les plans de l'espace; car les conditions auxquelles il est possible d'assujettir un plan absolument indéterminé sont en nombre triangulaire 3. Telle est encore celle des surfaces *paraboliques* de degré donné k, dont l'équation générale,

$$z=a_{0,0}+a_{1,0}x+a_{0,1}y+\ldots+a_{k,0}x^k+a_{k-1,1}x^{k-1}y+\ldots+a_{0,k}y^k,$$

renferme $\frac{(k+1)(k+2)}{1.2}$ paramètres indépendants. Mais, par

exemple, il n'en est pas ainsi pour la famille, dont le membre général est une sphère absolument indéterminée; car l'équation de celle-ci contient des paramètres dont le nombre est 4, c'est-à-dire non triangulaire.

Pour un contact d'ordre k entre une surface indéterminée et une ligne donnée (toujours en un point donné de cette dernière), il faut $k+1$ conditions. *Dans toute famille de surfaces comportant au moins deux paramètres, on peut donc chercher avec chance de réussite quelque surface osculatrice à une ligne en un point pris à volonté sur elle.*

Pour un contact d'ordre k entre une ligne indéterminée et une surface donnée, en un point donné, il faut $k+2$ conditions. *Dans toute famille de lignes dépendant de trois paramètres au moins on peut donc encore chercher quelque ligne osculatrice à une surface en un point marqué sur elle.*

Un contact d'ordre k entre une ligne indéterminée et une ligne donnée exige $2(k+1)$ conditions. *Pour que la famille considérée puisse fournir une ligne osculatrice à une ligne donnée, en un point désigné de celle-ci, il faut donc que ses paramètres soient en nombre pair.*

Dans ce dernier cas, quand la ligne donnée est plane et que la ligne indéterminée ne peut, par sa nature, qu'être située dans le même plan, $k+1$ de ces conditions se trouvent évidemment remplies d'elles-mêmes, et, si les paramètres sont en nombre quelconque $k+1$, la ligne osculatrice pourra exister avec un contact d'ordre k. La même simplification s'opère visiblement pour une ligne donnée et une ligne indéterminée assujetties toutes deux à être situées sur une même surface quelconque.

Les conditions générales formulées ci-dessus sont nécessaires, mais on notera avec soin qu'*elles ne sont pas suffisantes.*

68. Les propositions des nos 62 et suiv. permettent de considérer les figures osculatrices comme positions limites de figures variables de même famille, ayant avec la figure donnée un certain nombre de contacts d'ordres inférieurs (ou d'intersections) en des points tous infiniment voisins de celui où l'osculation existe. Cette manière de voir les choses est souvent utile.

69. Les éléments (paramètres) d'une figure de famille déter-

minée, ayant un contact d'ordre k avec une figure donnée, dépendent simplement, comme nous l'avons vu en détail, des valeurs prises en ce point par les fonctions qui interviennent d'une manière ou d'une autre dans la représentation analytique de cette dernière et par leurs dérivées d'ordres $\leq k$. Il en résulte que les propriétés géométriques de la première figure sont des images d'équations différentielles d'ordres au plus égaux à k entre les fonctions dont il s'agit.

Les figures osculatrices sont donc, dans la famille considérée, celles dont les propriétés descriptives et métriques fournissent, jusqu'à l'ordre le plus élevé qui puisse être atteint ainsi, la représentation géométrique de ces équations différentielles.

Leur considération supplée d'une manière pittoresque à l'étude analytique de ces équations, et il y a avantage à les choisir parmi celles qui, pour un même nombre de paramètres, ont les propriétés les plus simples et les plus aptes aux applications physiques; c'est pourquoi l'on prend de préférence le plan, la droite, le cercle, la sphère, figures dont les propriétés osculatrices forment à fort peu près tout le fond des théories dont nous nous occupons en ce moment.

Les considérations générales du n° 42, précisées aux n°s 47, 50, font voir, en outre, qu'*une figure osculatrice est, dans sa famille, celle qui coïncide le plus approximativement avec une figure donnée de même variété, dans le voisinage du contact tout au moins, et qui, par suite, peut lui être pratiquement substituée si toutefois l'ordre de celui-ci est suffisamment élevé.* D'où la substitution fréquente dans les arts de construction, de figures osculatrices faciles à tracer, aux figures théoriques, quand celles-ci sont difficiles à réaliser matériellement (pendule isochrone, dents des engrenages, parallélogramme de Watt, etc.).

70. En employant le mot *symptose* que j'ai proposé dans une circonstance analogue [1], pour exprimer la coïncidence de deux figures, soit complète si elles sont de même variété, soit incom-

---

[1] *Exposition nouvelle de la théorie des formes linéaires et des déterminants* (n° 10). Paris, 1884, librairie Gauthier-Villars et fils.

plète si leurs variétés sont différentes, pour exprimer, par exemple, qu'ayant une ligne et une surface, la seconde contient la première (ou bien ce qui revient au même, que la première est située sur la seconde), il est évident qu'*en tout point commun de deux figures en symptose, elles offrent un contact de tel ordre qu'on veut;* il est évident encore que, *si une famille contient quelque figure* $\mathfrak{F}$ *en symptose avec une figure donnée* F, *la première* $\mathfrak{F}$ *est celle des figures de cette famille* (*si elle est déterminée*) *qui est osculatrice à* F (*en un point commun quelconque*). La sphère qui contient une figure sphérique, une génératrice rectiligne d'une surface réglée sont, par exemple, les figures osculatrices de la famille *sphères*, pour la ligne, de la famille *droites*, pour la surface.

71. Il est bon de noter qu'en des points exceptionnels de la figure donnée, l'ordre du contact de la figure osculatrice peut s'élever au-dessus de sa valeur normale, indiquée par le degré d'indétermination du membre général de la famille de cette dernière. *Mais, quand ceci a lieu en tous les points de la figure donnée, celle-ci est certainement en symptose* (70) *avec quelque figure appartenant à la famille considérée.*

Considérons, par exemple, une surface

$$(4)\qquad f(x, y, z, a_1, \ldots, a_{k+1}) = 0,$$

dépendant de $k+1$ paramètres indéterminés $a_1, a_2, \ldots a_{k+1}$ et une ligne donnée représentée par

$$(5)\qquad x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t).$$

En chaque point de cette ligne, la surface osculatrice, prise dans la famille (4), a en général avec elle un contact d'ordre k (67); mais, quand cet ordre s'élève toujours à $k+1$, il est possible de trouver pour $a_1, \ldots a_{k+1}$ des fonctions de t vérifiant identiquement les conditions de ce dernier contact (55),

$$(6)\qquad f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^{k+1} f}{\partial t^{k+1}} = 0.$$

f représentant maintenant la fonction composée de t,

$$f[\varphi(t), \chi(t), \psi(t), a_1, \ldots, a_{k+1}].$$

En différentiant, par rapport à t, chacune des $k+1$ premières équations (6) et ayant égard à la suivante, il vient

$$\frac{\partial}{\partial a_1} f \cdot \frac{da_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial a_2} f \cdot \frac{da_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial}{\partial a_{k+1}} f \cdot \frac{da_{k+1}}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{da_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{da_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial}{\partial a_{k+1}} \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{da_{k+1}}{dt} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \cdot \frac{da_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \cdot \frac{da_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial}{\partial a_{k+1}} \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \cdot \frac{da_{k+1}}{dt} = 0.$$

On en conclut

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{da_2}{dt} = \ldots = \frac{da_{k+1}}{dt} = 0;$$

effectivement, le déterminant des coefficients de ces équations linéaires et homogènes en $\frac{da_1}{dt}$, ..., $\frac{da_{k+1}}{dt}$ ne s'évanouit pas puisqu'il est précisément le déterminant différentiel par rapport aux $k+1$ paramètres, des membres gauches des $k+1$ premières équations (6), déterminant qu'il faut supposer $\neq 0$ pour que la détermination des paramètres de la surface, au contact d'ordre k avec la ligne, soit possible (normalement).

Les quantités a_1, a_2, ..., a_{k+1} se réduisent donc toutes à des constantes; la surface osculatrice est ainsi la même en tous les points de la ligne (5), et la première des relations (6) montre qu'elle la contient tout entière.

Les autres cas se traiteraient de la même manière.

CHAPITRE III.

CONTACTS DES SURFACES ET DES LIGNES AVEC LES FIGURES DU PREMIER DEGRÉ.

Plan tangent, tangentes et droites osculatrices à une surface.

72. L'équation générale d'un plan,

$$(1) \qquad AX + BY + CZ + D = 0,$$

renferme 4 paramètres indéterminés, se réduisant à

$$3 = \frac{(1+1)(1+2)}{1.2},$$

nombre triangulaire, quand on les divise tous par l'un d'entre eux $\neq 0$; il est donc à supposer (67) qu'ils sont complètement déterminables par la condition de faire acquérir au plan un contact du premier ordre avec une surface donnée

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

en un point marqué arbitrairement sur celle-ci. L'exactitude de cette présomption que nous vérifierons dans un instant assigne à la surface (2), en chacun de ses points, un *plan osculateur* (66) qu'on nomme habituellement son *plan tangent* en ce point.

Les considérations du n° 61 fournissent immédiatement l'équation du plan tangent en (x, y, z); car la nullité des déterminants des trois paires de colonnes du tableau

$$\begin{matrix} \dfrac{df}{dx}, & \dfrac{df}{dy}, & \dfrac{df}{dz}, \\ A, & B, & C, \end{matrix}$$

donne immédiatement

$$A : \frac{df}{dx} = B : \frac{df}{dy} = C : \frac{df}{dz};$$

comme d'autre part le plan doit contenir le point en question, il vient ensuite

$$D = -(Ax + By + Cz),$$

et, pour l'équation cherchée, on peut prendre

$$(3) \qquad \frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dy}(Y - y) + \frac{df}{dz}(Z - z) = 0,$$

sous la condition (2) bien entendu. Les égalités simultanées

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = \frac{df}{dz} = 0$$

étant impossibles (2) (aux points ordinaires de la surface), le plan tangent existe en chaque point, et il y est entièrement déterminé comme nous l'avons annoncé.

La proposition énoncée au n° 64 permet de considérer le plan tangent comme la position limite d'un plan passant par trois points infiniment voisins de celui de contact, en particulier par ce point de contact et deux autres infiniment voisins de lui. Mais la restriction formulée dans cet énoncé est nécessaire : si par exemple, on coupait la surface par un plan passant par le point de contact, mais distinct du plan tangent, et si l'on prenait les trois points mobiles sur cette section, le plan qu'ils déterminent coïnciderait sans cesse avec le plan sécant, et, par suite, il ne pourrait avoir le plan tangent pour position limite.

73. *Une coordonnée d'un point de la surface* (2) *est fonction olotrope des deux autres, tant que le plan tangent en ce point ne devient pas parallèle à l'axe correspondant.* Car, d'après l'équation (3), ce non-parallélisme assure la non-nullité de la dérivée du premier membre de l'équation (1) par rapport à la coordonnée considérée (310*).

74. *La distance (perpendiculaire ou oblique) au plan tangent, d'un point de la surface infiniment voisin du point de contact, est en général infiniment petite du second ordre par rapport aux coordonnées (planes) de son pied, rapporté à deux axes rectilignes ayant le point de contact pour origine.* C'est une simple application du théorème du n° 47 (*in fine*), autorisée par ce qui précède (73), au cas où l'on rapporterait

simultanément la surface et son plan tangent à un axe des z parallèle à la direction de la distance mobile et à deux autres, parallèles aux axes rectilignes considérés dans le plan tangent.

75. Si l'équation de la surface est donnée sous la deuxième forme

$$z = F(x, y),$$

l'équation correspondante du plan tangent est évidemment

$$Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x) + \frac{dz}{dy}(Y - y),$$

où $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ remplacent pour abréger $F^{(1,0)}(x, y)$, $F^{(0,1)}(x, y)$.

Si enfin on part des équations de la surface appartenant au troisième mode (5), on pourra prendre pour les équations analogues du plan tangent

$$X = x + \frac{dx}{dp}(P - p) + \frac{dx}{dq}(Q - q),$$

$$Y = y + \frac{dy}{dp}(P - p) + \frac{dy}{dq}(Q - q),$$

$$Z = z + \frac{dz}{dp}(P - p) + \frac{dz}{dq}(Q - q),$$

P, Q désignant pour le plan les deux variables auxiliaires intervenant dans ce mode de représentation. La chose est évidente d'après ce que nous avons dit aux n°s 7, 43.

En éliminant P, Q entre ces trois équations, ou bien en ayant égard aux relations finales du n° 6, on retrouve sous cette autre forme souvent utile

$$l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z) = 0$$

l'équation (3) du plan tangent.

76. Il est évident *qu'un plan donné coïncide avec son plan tangent construit en un quelconque de ses points* (*cf.* 70).

Il en résulte que *si deux surfaces ont un contact d'ordre quelconque* (> 0), *leurs plans tangents en ce point coïncident.* Car ces plans tangents ont nécessairement un contact mutuel d'ordre 1 (48).

Réciproquement, *deux surfaces ayant même plan tangent en un point commun, y, ont un contact d'ordre* 1 *au moins.*

77. Le plan tangent à une surface peut fort bien avoir avec elle un contact d'ordre > 1; mais, sauf le cas où la surface serait elle-même un plan, il est impossible que cette particularité se présente en tous ses points (71).

78. On nomme *tangente* à une surface, une droite ayant avec elle un contact d'ordre 1 au moins.

Toute tangente à un plan est entièrement située sur lui. Car s'il s'agit du plan (1) et de sa tangente au point x, y, z, ayant pour équations (11)

$$(4)\qquad X = x + \alpha T, \qquad Y = y + \beta T, \qquad Z = z + \gamma T,$$

les conditions du contact (55) donnent immédiatement

$$Ax + By + Cz + D = A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

égalités imposant à la droite (4) la nécessité d'appartenir tout entière au plan (1).

Cette simple observation montre que *les tangentes à la surface en un point donné sont toutes les droites qu'on peut tracer par lui sur le plan tangent au même point.* Car le contact d'une tangente avec la surface assure pour elle l'existence d'un contact du premier ordre au moins avec le plan tangent qui en a un semblable aussi avec la surface (56) et par suite la coïncidence de la tangente avec quelque droite de ce plan. Inversement, en outre, toute droite tracée dans le plan tangent par son point de contact peut être considéré comme ayant avec lui un contact d'ordre 1 en ce point, ce qui assure l'existence entre elle et la surface d'un contact du même ordre au moins.

79. Les équations d'une droite indéterminée de l'espace renfermant quatre paramètres, on peut essayer de l'assujettir à offrir un contact d'ordre 2 avec la surface (2), en un point donné quelconque (x, y, z) de celle-ci; car la réalisation de ce contact ne dépend que de $2 + 2 = 4$ équations (67). En prenant les équations de la droite sous la forme (4), la méthode du n° 55 conduit à égaler à 0 les valeurs, pour $T = 0$, de la fonction composée

de T, $f(x + \alpha T, y + \beta T, z + \gamma T)$, et de ses dérivées première et seconde par rapport à cette variable auxiliaire. On obtient ainsi trois conditions dont la première se trouve remplie d'elle-même parce que la droite (4) passe déjà par le point considéré, dont les deux autres sont

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\beta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\gamma = 0, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha^2 + \ldots + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\beta\gamma + \ldots = 0. \end{array} \right.$$

Des deux polynômes entiers en α, β, γ qui constituent les premiers membres de ces équations, le premier ne peut être identiquement nul, puisque nous raisonnons en un point ordinaire de la surface (2). Le système de ces équations est donc déterminé ou indéterminé selon que le deuxième polynôme n'est pas ou est algébriquement divisible par le premier, c'est-à-dire, ce que nous omettons de prouver pour abréger, selon que l'ordre du contact du plan tangent est $= 1$ ou s'élève au-dessus de 1. Dans ce dernier cas, qui est exceptionnel (77), toutes les tangentes à la surface au point considéré offrent avec elle des contacts du second ordre (78), (56). Dans l'autre cas que nous considérerons exclusivement, les équations (5) déterminent complètement les inconnues α, β, γ, ou du moins des quantités proportionnelles, c'est-à-dire les *paramètres de direction* de la droite cherchée; celle-ci est donc osculatrice à la surface au point considéré (66).

Les équations (5) étant de degrés 1, 2, *il y a deux droites osculatrices, soit réelles distinctes, soit réelles coïncidantes, soit imaginaires.*

En substituant à α, β, γ dans les équations (5) leurs expressions en X, Y, Z tirées de (4), on obtient celles de deux surfaces sur chacune desquelles sont situées les droites osculatrices, et qui les fournissent par leur intersection. La première équation est celle du plan tangent à la surface proposée et montre que les droites osculatrices y sont situées toutes deux, ce que nous savions déjà puisque ces droites sont des tangentes à la surface (78). La dernière est celle d'un certain cône du deuxième degré ayant son sommet en (x, y, z).

Pour une surface algébrique du deuxième degré, on aperçoit

immédiatement qu'en chaque point les droites osculatrices sont précisément ses génératrices rectilignes. Elles sont réelles, distinctes pour l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique, réelles coïncidantes pour le cylindre et le cône (sauf au sommet qui est un point singulier), imaginaires pour l'hyperboloïde à deux nappes, l'ellipsoïde et le paraboloïde elliptique, indéterminées pour toutes les surfaces de ce degré dégénérant en une paire de plans.

La consistance de ces droites en chaque point d'une surface quelconque exerce une influence majeure sur sa forme dans le voisinage de ce point, comme nous venons de le constater pour celles du deuxième degré. On leur donne habituellement le nom moins convenable de tangentes *asymptotiques* (*cf.* 204, II, *inf.*).

Quand l'ordre du contact du plan tangent s'élève au-dessus de 1, on constate facilement que l'ordre maximum du contact réalisable entre une droite et la surface au point considéré s'élève aussi au-dessus de deux, ainsi que le nombre de ces droites osculatrices.

Tangente, plans tangents, plan osculateur à une ligne.

80. Les équations générales d'une droite

$$\begin{cases} A_1 X + B_1 Y + C_1 Z + D_1 = 0, \\ A_2 X + B_2 Y + C_2 Z + D_2 = 0 \end{cases}$$

renferment huit paramètres se réduisant à quatre par l'élimination successive de deux coordonnées faite entre elles, suivie de la division de chaque équation finale par quelque déterminant non nul. Il est donc à supposer (67) qu'ils sont exactement déterminables par la condition de faire naître un contact du premier ordre entre la droite et une ligne donnée

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

en tout point donné de celle-ci. Cette affirmation, une fois vérifiée, assignera à la ligne (1), en chacun de ses points, une *droite osculatrice* qu'on nomme habituellement sa *tangente* en ce point.

Comme, d'après le n° 61, II, trois lignes quelconques empruntées aux deux tableaux

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{df_1}{dx}, & \frac{df_1}{dy}, & \frac{df_1}{dz}, \\ \frac{df_2}{dx}, & \frac{df_2}{dy}, & \frac{df_2}{dz}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} A_1, & B_1, & C_1, \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{array}\right.$$

doivent en former un dont les déterminants sont tous nuls, comme d'autre part, dans chacun d'eux pris séparément, les déterminants ne peuvent l'être tous, il faut et il suffit que l'on ait

$$A_1 = \lambda \frac{df_1}{dx} + \mu \frac{df_2}{dx}, \qquad B_1 = \lambda \frac{df_1}{dy} + \mu \frac{df_2}{dy}, \qquad C_1 = \lambda \frac{df_1}{dz} + \mu \frac{df_2}{dz},$$
$$A_2 = \nu \frac{df_1}{dx} + \varpi \frac{df_2}{dx}, \qquad B_2 = \nu \frac{df_1}{dy} + \varpi \frac{df_2}{dy}, \qquad C_2 = \nu \frac{df_1}{dz} + \varpi \frac{df_2}{dz},$$

(λ, μ), (ν, ϖ) représentant quelque système de paires de multiplicateurs dont le déterminant n'est pas nul. Comme ensuite les conditions exprimant que la droite passe par (x, y, z) donnent

$$D_1 = -(A_1 x + B_1 y + C_1 z),$$
$$D_2 = -(A_2 x + B_2 y + C_2 z),$$

les équations de cette droite se forment en ajoutant membre à membre les deux qui suivent

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{df_1}{dx}(X - x) + \frac{df_1}{dy}(Y - y) + \frac{df_1}{dz}(Z - z) = 0, \\ \frac{df_2}{dx}(X - x) + \frac{df_2}{dy}(Y - y) + \frac{df_2}{dz}(Z - z) = 0, \end{array}\right.$$

multipliées d'abord par λ, μ, ensuite par ν, ϖ; leur système est donc équivalent au système (2) qui représente ainsi la tangente cherchée.

La tangente est toujours unique et son existence n'est jamais illusoire (aux points ordinaires), à cause de la non-nullité simultanée des déterminants des coefficients de ces équations (8), assurant à leur système la propriété d'être réduit.

La tangente est la position limite d'une sécante passant par deux points quelconques infiniment voisins de celui de contact,

en particulier par ce point de contact et un autre infiniment voisin de lui (62).

Dans cette dernière observation, nous retrouvons la définition traditionnelle de la tangente que nous avons abandonnée à cause de son caractère étroit et artificiel, des détours à faire pour en déduire les autres propriétés de cette droite.

81. *Deux coordonnées d'un point de la ligne* (1) *sont fonctions olotropes de la troisième, tant que la tangente ne devient pas parallèle au plan des deux premières.* Car, d'après les équations (2), ce non-parallélisme entraîne la non-nullité en ce point du déterminant différentiel des premiers membres des équations (1), pris par rapport aux deux coordonnées dont il s'agit (310*).

82. *La distance (perpendiculaire ou oblique) à la tangente, d'un point de la ligne infiniment voisin du point de contact, est en général infiniment petite du second ordre par rapport à la distance de son pied au point de contact.* C'est ce qui résulte d'une observation faite au n° 50, IV, applicable, par ce qui précède, au cas où l'on prend l'un des axes parallèle à la tangente et le plan des deux autres, parallèle à celui parallèlement auquel doit se construire la distance considérée.

83. Si les équations de la ligne sont données sous la deuxième forme

$$\left\{\begin{array}{l} y = F_1(x), \\ z = F_2(x), \end{array}\right.$$

les équations correspondantes de la tangente sont évidemment

$$(Y - y) = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

$$(Z - z) = \frac{dz}{dx}(X - x),$$

où $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ sont écrites au lieu de $F'_1(x)$, $F'_2(x)$.

84. Si enfin on partait des équations de la ligne appartenant

au troisième mode

$$(3) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \chi(t), \qquad z = \psi(t),$$

on pourrait prendre pour les équations analogues de la tangente

$$(4)\ X = x + \frac{dx}{dt}(T - t), \quad Y = y + \frac{dy}{dt}(T - t), \quad Z = z + \frac{dz}{dt}(T - t),$$

T désignant, pour cette droite, la variable auxiliaire nécessaire à ce mode de représentation. C'est ce qui résulte immédiatement des nos 11, 50.

Souvent on remplace les équations (4) par

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}\left(= \frac{T - t}{dt}\right).$$

Ici, et dans beaucoup d'autres circonstances, dx, dy, dz représentent les différentielles des coordonnées de la ligne prises par rapport à la variable auxiliaire, très souvent sous-entendue, et considérées de préférence à $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ pour la simplification de l'écriture.

Pour une ligne tracée sur une surface donnée, les formules (10) du n° 22, qui sont les mêmes en coordonnées non rectangulaires et peuvent être écrites

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp + \frac{\partial\varphi}{\partial q}dq, \qquad dy = \ldots. \qquad dz = \ldots,$$

fournissent les paramètres de direction de la tangente et montrent que cette direction ne dépend que du rapport $dp : dq$. Car la substitution à ces différentielles de quantités qui leur sont proportionnelles ne fait que multiplier dx, dy, dz par le même facteur.

Quand les axes sont rectangulaires, les équations précédentes et la formule (7) du n° 21 montrent que les cosinus directeurs de la tangente sont précisément

$$(5) \qquad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

la détermination du radical ds devant être choisie positive ou négative selon qu'il s'agit de l'une ou de l'autre des deux directions de la tangente considérée (*Cf.* 51).

Comme le radical en question ne peut s'évanouir (10), son calcul par cheminement laisse invariable le signe initial qu'il aura plu d'adopter pour lui. A ses deux déterminations, les expressions (5) feront donc correspondre deux systèmes de fonctions de t, caractérisant ce qu'on nomme souvent les deux directions opposées de l'*ensemble* des tangentes à la ligne.

85. D'après le n° 70 ou une constatation spéciale immédiate, *une droite coïncide avec sa tangente construite en l'un quelconque de ses points.*

Deux lignes ayant un contact d'ordre quelconque (>0) *ont donc même tangente en ce point.* Car leurs tangentes ont un contact d'ordre mutuel 1 (50, V).

Réciproquement, *deux lignes ayant même tangente en un point commun y ont un contact d'ordre* 1 *au moins.*

86. L'élévation au-dessus de 1 de l'ordre du contact de la tangente est accidentelle, à moins que la ligne ne soit une simple droite (71). Comme elle rend illusoires certaines formules, il importe de noter le caractère des points où cette particularité se présente.

En vertu des équations (4), les dérivées secondes par rapport à T des coordonnées du point courant de la tangente s'évanouissent toutes trois pour $T=t$; il faut donc et il suffit, pour l'existence de la particularité en question (50, I), qu'on puisse trouver une fonction $\Theta(T)$ se réduisant à t pour $T=t$, sans donner $\Theta'(t)=0$, mais rendant toutes trois nulles, pour $T=t$, les dérivées secondes de $\varphi[\Theta(T)]$, $\chi[\Theta(T)]$, $\psi[\Theta(T)]$. A cause de $\Theta'(t)\neq 0$, on obtient immédiatement pour $\Theta''(t)$ les conditions

$$\begin{aligned}\varphi'(t)\Theta''(t)+\varphi''(t)\Theta'(t)^2 &= \chi'(t)\Theta''(t)+\chi''(t)\Theta'(t)^2\\ &= \psi'(t)\Theta''(t)+\psi''(t)\Theta'(t)^2=0,\end{aligned}$$

d'où

$$dy\,d^2z-dz\,d^2y=dz\,d^2x-dx\,d^2z=dx\,d^2y-dy\,d^2x=0.$$

On peut voir immédiatement *a posteriori* que, si ces conditions étaient remplies quelle que fût t, la ligne se réduirait à une droite. Car, en supposant $dx\neq 0$ pour fixer les idées, et appelant μ, ν cer-

taines constantes, on trouverait (51***)

$$dy = \mu\,dx,$$
$$dz = \nu\,dx,$$

d'où, en intégrant et appelant μ', ν' d'autres constantes,

$$y = \mu x + \mu',$$
$$z = \nu x + \nu'.$$

87. Un plan est dit *tangent* à une ligne en un de ses points, quand il y offre avec elle un contact d'ordre 1 au moins.

Les plans tangents à une ligne en un point donné sont tous ceux qui passent par sa tangente en ce point; car le contact d'un plan tangent avec la ligne en entraîne un du premier ordre au moins avec sa tangente qui en a un de même ordre (58); ce plan contient donc entièrement la tangente (78). Inversement, tout plan passant par la tangente a un contact d'ordre 1 au moins avec la ligne, puisque celle-ci en a un semblable avec sa tangente.

88. *Quand une ligne est située sur une surface, chaque tangente à la première l'est aussi à la seconde au même point; par suite elle est tout entière dans son plan tangent.* Car cette tangente ayant un contact du premier ordre avec la ligne en a un de même ordre au moins avec la surface au point considéré (58), (78).

Quand une surface passe par une ligne, chaque plan tangent à la première en un point de la seconde est tangent aussi à cette dernière au même point, et passe en conséquence par la tangente à celle-ci. Même raisonnement fondé sur les nos 56, 78.

On remarquera que les équations (2) de la tangente représentent individuellement les plans tangents aux surfaces (1) qui fournissent la ligne par leur intersection (72).

Ces deux propositions permettent évidemment de construire le plan tangent à une surface en un point, dès que l'on connaît seulement les tangentes à deux lignes tracées sur la surface par ce point, sans contact, de construire aussi bien la tangente à une ligne, quand on connaît au même point les plans tangents à deux surfaces menées par elle, sans contact mutuel. Elles sont d'un usage continuel en Géométrie théorique et en Géométrie descriptive.

La première renferme la définition classique du plan tangent,

au sujet de laquelle nous reproduirons avec plus de force encore les critiques formulées sur celle de la tangente (80), en y ajoutant le reproche de n'impliquer aucune notion de nature à conduire à celle des contacts plus intimes entre les surfaces.

89. Le nombre des conditions requises pour un contact du second ordre entre une surface indéterminée et une ligne, en un point donné de celle-ci, se réduisant à trois (67), et un plan indéterminé pouvant satisfaire précisément à trois conditions, *il existe en général, pour chaque point d'une ligne, un plan qui y offre avec elle un contact du second ordre;* c'est son *plan osculateur*. Puisqu'ainsi il est tangent à la ligne, il passe certainement par sa tangente (au même point) (87).

En vertu de la théorie générale (62), *le plan osculateur peut être considéré comme la position limite d'un plan mobile passant, soit par trois points de la ligne infiniment voisins du point de contact, soit par deux semblables et par la tangente en l'un d'eux, rien ne s'opposant à ce que l'un de ces points soit fixé au point de contact.*

Si

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

est l'équation du plan osculateur au point (x, y, z) à la ligne (3), les conditions d'un contact du second ordre entre l'un et l'autre sont (55)

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{6}$$

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = 0, \tag{7}$$

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{d^2y}{dt^2} + C\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \tag{8}$$

qui déterminent complètement le plan, du moins en général. Car, en substituant les différentielles aux dérivées pour simplifier l'écriture, les deux dernières donnent

$$\frac{A}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{B}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{C}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \tag{9}$$

et la première $D = -(Ax + By + Cz)$, moyennant quoi l'équa-

tion du plan osculateur est

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(X - x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)(Y - y) + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)(Z - z) = 0.$$

Ces formules sont indéfiniment illusoires quand les dénominateurs des fractions (9) s'évanouissent quelle que soit t; la ligne considérée se réduit alors à une droite (86); elle offre en tous ses points un contact d'ordre illimité avec un quelconque des plans qui passent par elle, et la théorie du plan osculateur ne lui est pas applicable, sinon partiellement et à titre conventionnel. En dehors de cette exception, elles le deviennent encore accidentellement, quand il s'agit d'un point où l'ordre du contact de la tangente s'élève au-dessus de 1 (*loc. cit.*).

Dans ce cas, tous les plans menés par la tangente ont avec la ligne un contact du second ordre au moins (58) et peuvent à certains points de vue être considérés comme osculateurs. Mais, pour avoir le véritable plan osculateur dont l'ordre du contact est alors > 2, il faut différentier l'équation (6) jusqu'à en obtenir une où les multiplicateurs de A, B, C ne soient pas proportionnels à dx, dy, dz, et qui, jointe à l'équation (7), servira à déterminer ces coefficients. Il est facile de constater qu'on y réussira si la ligne n'est pas droite; et l'ordre du contact du plan osculateur sera égal à l'ordre de cette équation au moins.

Il faut noter aussi les points où l'ordre du contact du plan osculateur s'élève au-dessus de 2; ce sont évidemment ceux où l'on peut satisfaire, par des valeurs de A, B, C non toutes $= 0$, aux équations (7), (8) et à

$$A\frac{d^3x}{dt^3} + B\frac{d^3y}{dt^3} + C\frac{d^3z}{dt^3} = 0,$$

exprimant la possibilité de faire naître un contact d'ordre $\geqq 3$, c'est-à-dire les points pour lesquels on a

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0.$$

Parmi eux, se trouvent ceux où la tangente a un contact d'ordre > 1, mais pas nécessairement seuls. Les points dont il

s'agit sont exceptionnels, si la ligne considérée n'est pas plane (71), ce dont on s'assure facilement *a posteriori*. Car si l'équation précédente avait lieu quelle que fût t, elle entraînerait immédiatement (51***)

$$\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda x + \mu y + \nu z = \varpi,$$

λ, μ, ν, ϖ désignant certaines constantes, et la ligne serait plane.

90. Aux remarques qui commencent le numéro ci-dessus, il convient d'ajouter la suivante qui n'est pas sans utilité. *Le plan osculateur est la position limite d'un plan mobile mené par son point de contact, parallèlement aux tangentes en deux points infiniment voisins de celui-ci.*

Car, si la tangente en l'un de ces points infiniment voisins, répondant à la valeur t de la variable auxiliaire, est représentée par

$$X = x + \frac{dx}{dt}(T - t), \qquad Y = y + \ldots, \qquad Z = z + \ldots,$$

celle construite en l'autre, répondant à $t + \Delta t$, le sera par

$$X = x + \Delta x - \left(\frac{dx}{dt} + \Delta\frac{dx}{dt}\right)\Delta t + \left(\frac{dx}{dt} + \Delta\frac{dx}{dt}\right)(T - t),$$

$$Y = \ldots, \qquad Z = \ldots,$$

et les coefficients de X, Y, Z dans l'équation du plan parallèle aux deux tangentes à la fois seront proportionnels aux trois déterminants du tableau

$$\left|\begin{array}{ccc} \dfrac{dx}{dt}, & \dfrac{dy}{dt}, & \dfrac{dz}{dt}, \\ \dfrac{dx}{dt} + \Delta\dfrac{dx}{dt}, & \dfrac{dy}{dt} + \Delta\dfrac{dy}{dt}, & \dfrac{dz}{dt} + \Delta\dfrac{dz}{dt}. \end{array}\right.$$

Or les limites de ces déterminants divisés par Δt coïncident évidemment avec celles des déterminants du tableau

$$\left|\begin{array}{ccc} \dfrac{dx}{dt}, & \dfrac{dy}{dt}, & \dfrac{dz}{dt}, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}, & \dfrac{d^2y}{dt^2}, & \dfrac{d^2z}{dt^2}, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire avec les coefficients des coordonnées courantes dans

l'équation du plan osculateur. Dans sa position limite, le plan dont il s'agit est ainsi parallèle au plan osculateur; par suite, il se confond avec lui, puisque l'un et l'autre ont en commun le point considéré.

91. *En tout point où l'ordre de son contact ne s'élève pas exceptionnellement au-dessus de 2, le plan osculateur traverse la ligne, laissant de part et d'autre de lui, les deux régions distinguées sur celle-ci au n° 10 dans le voisinage du point de contact.*

Car si t_0 est la valeur correspondante de la variable auxiliaire, les conditions (6), (7), (8) montrent que, pour $t = t_0$, la fonction composée $Ax + By + Cz + D$ s'évanouit numériquement avec ses deux premières dérivées, qu'ainsi son développement par la formule de Taylor est de la forme

$$H_3(t - t_0)^3 + H_4(t - t_0)^4 + \ldots \tag{11}$$

où $H_3 \neq 0$ par hypothèse. Le signe de la valeur finale de cette fonction change donc nécessairement avec celui de l'accroissement infiniment petit $t - t_0$, ce qui entraîne évidemment la particularité topographique mentionnée dans l'énoncé.

Mais aucun autre plan tangent à la ligne (3) *ne peut la traverser;* car pour lui la série (11) commence par un terme dont le degré effectif en $t - t_0$ est $= 2$, partant pair.

92. Pour une ligne plane, la tangente est forcément située dans son plan, puisqu'elle a avec celui-ci un contact du premier ordre au moins (58), (78).

En rapportant la ligne à des axes tracés dans son plan, les représentations analytiques de la tangente en (x, y) deviennent immédiatement soit

$$\frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dy}(Y - y) = 0,$$

premier mode, soit

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

deuxième mode, soit

$$X = x + \frac{dx}{dt}(T - t), \qquad Y = y + \frac{dy}{dt}(T - t),$$

troisième mode, ou bien

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} \qquad (Cf.\ 84).$$

Quand les axes sont rectangulaires, les cosinus des angles formés avec eux par les deux directions de la tangente sont les déterminations opposées des expressions

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} \qquad (loc.\ cit.),$$

et la dérivée $\frac{dy}{dx}$ a pour représentation géométrique la tangente trigonométrique de l'angle formé, avec la partie positive de l'axe des x, par celle de ces deux directions dont les points ont des abscisses supérieures à celle du point de contact.

Quelquefois on considère la *longueur de la tangente,* segment de cette droite limité par l'axe des x et le point de contact, et la *sous-tangente,* projection de ce segment faite sur cet axe parallèlement à l'autre. Ces quantités ont respectivement pour expressions

$$\pm y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} : \frac{dy}{dx}, \qquad y : \frac{dy}{dx},$$

les axes étant toujours supposés rectangulaires.

93. *En tout point d'une ligne plane où le contact de la tangente n'est pas d'un ordre supérieur à* 1, *cette droite divise le plan de la ligne en deux régions dans une seule desquelles tombent tous les points de celle-ci qui sont infiniment voisins du point de contact;* plus brièvement, *la tangente ne traverse pas la ligne.* On raisonne comme au n° 91, en remarquant que si A, B, C sont les coefficients de l'équation de la tangente, l'expression $Ax + By + C$ est une fonction composée de t qui s'évanouit au point de contact avec sa dérivée première, mais à l'exclusion de la seconde (52).

Une droite parallèle à une pareille tangente et infiniment voisine d'elle coupe la ligne en deux points infiniment voisins

du point de contact, si elle tombe dans l'un des deux demi-plans mentionnés ci-dessus, en aucun si elle tombe dans l'autre. Car les valeurs de t qui fournissent les points d'intersection sont les racines de l'équation

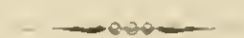
$$Ax + By + C + \Delta C = 0,$$

où ΔC est une quantité infiniment petite, à prendre positive ou négative selon qu'il s'agit de l'un de ces demi-plans ou de l'autre. Comme la valeur initiale t_0 de t, correspondant à $\Delta C = 0$, annule le premier membre de cette équation et sa dérivée première par rapport à t, mais non sa dérivée seconde, les considérations des nos 141** et suiv. montrent facilement qu'en fait de racines infiniment voisines de t_0, l'équation considérée n'en possède que deux représentées par une même série entière en $\pm\sqrt{\Delta C}$ dont les coefficients sont tous réels, ou deviennent tels tout au moins par la substitution de $-\Delta C$ à ΔC. Ces deux racines sont donc réelles ou imaginaires, selon que ΔC est une quantité d'un signe ou de l'autre.

Ces deux observations justifient la forme sous laquelle le dessin présente continuellement à nos yeux les parties des courbes planes ne contenant pas d'autres points que ceux dont nous parlons en ce moment. La particularité la plus saillante consiste en ce que, dans le voisinage de chaque point de ce genre, la courbe montre toujours sa *convexité* à un observateur placé sur celui des deux demi-plans que nous avons appris à distinguer ci-dessus, où ne tombe aucun point de la ligne infiniment voisin de celui que l'on considère. Elle montre sa *concavité* à un observateur infiniment éloigné de la tangente sur l'autre demi-plan.

La même particularité s'observe encore aux points où l'ordre de contact de la tangente est un nombre *impair* quelconque. Mais la courbe *traverse* sa tangente quand cet ordre est pair, par exemple aux points *d'inflexion* où il est égal à 2.

94. Le plan osculateur d'une ligne plane (non droite) coïncide avec le plan même qui est supposé la contenir entièrement; ceci résulte soit de l'observation générale du n° 70, soit d'un calcul direct des plus faciles.



CHAPITRE IV.

FIGURES ENVELOPPES.

Lignes à un ou deux paramètres.

95. Les figures appartenant à une même famille donnée (66) offrent toutes en général, mais pas nécessairement, des contacts d'ordre commun plus ou moins élevé avec une même figure invariable, de la même variété ou de l'autre. Quand elle existe, cette figure fixe se nomme l'*enveloppe* de celles qui constituent la famille en question, et, relativement à elle, chacune de ces dernières se nomme une *enveloppée*.

La ligne à un paramètre a,

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(x, y, z, a) = 0, \\ f_2(x, y, z, a) = 0, \end{cases}$$

a pour enveloppe une ligne fixe avec laquelle elle offre sans cesse un contact du premier ordre, s'il est possible de satisfaire, quel que soit a, aux quatre équations (1) *et*

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{df_1}{da} = 0, \\ \dfrac{df_2}{da} = 0, \end{cases}$$

par la substitution à x, y, z de fonctions de a ne se réduisant pas toutes trois à des constantes.

Si cette enveloppe de la ligne (1) existe, les coordonnées de son contact variable avec celle-ci sont évidemment trois fonctions de a, savoir $\varphi(a)$, $\chi(a)$, $\psi(a)$, elle aura pour équations

$$(3) \qquad X = \varphi(t), \qquad Y = \chi(t), \qquad Z = \psi(t),$$

et l'existence d'un contact du premier ordre, entre l'enveloppée (1) et l'enveloppe (3), au point de cette dernière répondant à $t = a$, exigera (50, III) les conditions

$$[f_1(X, Y, Z, a)]_{t=a} = 0,$$
$$[f_2(X, Y, Z, a)]_{t=a} = 0,$$
$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial X}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial Y}\frac{dY}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial Z}\frac{dZ}{dt}\right]_{t=a} = 0,$$
$$\left[\frac{\partial f_2}{\partial X}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial Y}\frac{dY}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial Z}\frac{dZ}{dt}\right]_{t=a} = 0.$$

En posant maintenant $\varphi(a) = x$, $\chi(a) = y$, $\psi(a) = z$, les deux premières conditions deviennent les équations (1), sauf le sens nouveau donné aux lettres x, y, z, et, différentiées une fois par rapport à a, elles donnent

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{dx}{da} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{da} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{da} = 0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{dx}{da} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{dy}{da} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{dz}{da} = 0,$$

moyennant quoi les deux dernières conditions se réduisent aux équations (2), sous le bénéfice de la même observation.

Ainsi donc, quand elles existent, les fonctions $\varphi(a)$, $\chi(a)$, $\psi(a)$ sont les expressions de x, y, z en a, tirées des équations (1), (2); et il est clair inversement que, si le système de ces quatre équations est possible, la substitution de t à a dans les trois fonctions de ce paramètre que sa résolution fournit, donnera les seconds membres à attribuer aux équations (3) pour qu'elles représentent une enveloppe. Mais, pour ne pas multiplier les notations, on peut fort bien laisser a représenter la variable auxiliaire des équations de l'enveloppe, et écrire celles-ci

$$X = \varphi(a), \qquad Y = \chi(a), \qquad Z = \psi(a);$$

on y trouve cet autre avantage, d'avoir immédiatement les coordonnées du point de contact de l'enveloppe avec l'enveloppée qui correspond à la valeur a attribuée au paramètre.

96. La résolubilité des équations (1), (2) étant un fait exceptionnel, parce qu'elles sont plus nombreuses que les inconnues (319*), on peut dire qu'en général *la ligne* (1) *n'a point d'enveloppe*. Elle n'en a point non plus, quand, au lieu de véritables

fonctions de a, la résolution des mêmes équations, même possible, ne fournit pour x, y, z, que un ou plusieurs systèmes de trois constantes (*Cf.*, 13). Mais comme alors la ligne variable (1) passe sans cesse par les points fixes correspondants, on continue cependant quelquefois à dire qu'*elle a une enveloppe se réduisant à la figure formée par ces points.*

Une condition nécessaire à l'existence de l'enveloppe est que *l'élimination de x, y, z entre les quatre équations* (1), (2), *conduise à une équation finale en a, se réduisant à une identité;* mais elle n'est pas suffisante.

Quand l'enveloppe existe, *on obtient évidemment ses équations du premier mode, en éliminant a de deux manières quelconques entre les équations* (1), (2). Sa dégénérescence en un système de points se manifeste alors par la possibilité de faire cette élimination de *plus de deux manières.*

97. *Quand chaque ligne* (1), *fixée pour un instant, est coupée sans cesse par une autre infiniment voisine, prise dans la même famille, l'enveloppe existe, et ses points de contact avec la première ligne sont précisément les positions limites de ces points d'intersection.*

En appelant h un accroissement infiniment petit attribué à a, la seconde ligne a pour équations

$$\left\{\begin{aligned} f_1(x, y, z, a+h) &= f_1 + \frac{df_1}{da}h + \frac{d^2 f_1}{da^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots = 0,\\ f_2(x, y, z, a+h) &= f_2 + \frac{df_2}{da}h + \frac{d^2 f_2}{da^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots = 0;\end{aligned}\right.$$

par suite, les coordonnées des points communs qu'on lui suppose avec la première, satisfont pour toute valeur de h aux équations (1) et

$$\frac{df_1}{da} + \frac{d^2 f_1}{da^2}\frac{h}{1.2} + \ldots = 0,$$

$$\frac{df_2}{da} + \frac{d^2 f_2}{da^2}\frac{h}{1.2} + \ldots = 0.$$

résultant de leur combinaison évidente avec les précédentes. Comme les premiers membres de ces dernières ont $\frac{df_1}{da}$, $\frac{df_2}{da}$ pour limites, les coordonnées des positions limites de ces points com-

muns satisferont aux équations (1), (2). En d'autres termes, ces quatre équations sont résolubles par rapport à x, y, z et, par suite (95) donnent une enveloppe touchant précisément la ligne (1) aux points indiqués dans l'énoncé.

98. Un cas particulier intéressant en lui-même et fort utile est celui où *la ligne mobile* (1) *se réduit à une droite*. Nous le traiterons par une méthode différente, en prenant les équations de la droite sous la forme

$$(4)\qquad X = x + \xi T, \qquad Y = y + \eta T, \qquad Z = z + \zeta T.$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes, T la variable auxiliaire propre au troisième mode de représentation des lignes, et x, y, z, ξ, η, ζ six coefficients, fonctions données du paramètre a.

Pour que cette droite reste, quel que soit a, tangente à une ligne fixe, il faut évidemment et il suffit qu'on puisse marquer sur elle un point qui, entraîné dans son mouvement, décrive une ligne ayant pour tangente sa position correspondante, c'est-à-dire que l'on puisse trouver pour T une fonction de a donnant quel que soit a (84),

$$\frac{\dfrac{dx}{da} + \xi\dfrac{dT}{da} + \dfrac{d\xi}{da}T}{\xi} = \frac{\dfrac{dy}{da} + \eta\dfrac{dT}{da} + \dfrac{d\eta}{da}T}{\eta} = \frac{\dfrac{dz}{da} + \zeta\dfrac{dT}{da} + \dfrac{d\zeta}{da}T}{\zeta}.$$

Ou bien, en égalant chacun de ces rapports à une même inconnue auxiliaire ω, fonction de a aussi, il faut que, par des déterminations convenables de T, ω, on puisse satisfaire aux trois équations linéaires simultanées

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{da} + \xi\left(\dfrac{dT}{da} - \omega\right) + \dfrac{d\xi}{da}T = 0, \\ \dfrac{dy}{da} + \eta\left(\dfrac{dT}{da} - \omega\right) + \dfrac{d\eta}{da}T = 0, \\ \dfrac{dz}{da} + \zeta\left(\dfrac{dT}{da} - \omega\right) + \dfrac{d\zeta}{da}T = 0, \end{cases}$$

d'où la condition

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{da} & \dfrac{dy}{da} & \dfrac{dz}{da} \\ \xi & \eta & \zeta \\ \dfrac{d\xi}{da} & \dfrac{d\eta}{da} & \dfrac{d\zeta}{da} \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, si cette relation a lieu entre $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, et si la droite (4) ne reste pas parallèle à elle-même, elle enveloppe certainement une ligne, ou bien elle passe par un point fixe. Car alors ξ, η, ζ ne restant pas proportionnels à des constantes, l'un au moins des déterminants des éléments des deux dernières lignes du déterminant (6) est $\neq 0$ (51***); et, de deux des équations (5), on pourra certainement tirer pour T, $\frac{dT}{da} - \omega$, pour T, ω par suite, des fonctions de a satisfaisant à la troisième en vertu de (6). Si la substitution de cette valeur de T dans les équations (4) rend leurs seconds membres constants, la droite passe constamment par le point fixe ayant pour coordonnées les valeurs correspondantes de X, Y, Z; sinon, elle sera tangente à la ligne dont les mêmes équations expriment les coordonnées en fonctions de a jouant le rôle de variable auxiliaire.

On remarquera que la relation (6) a toujours lieu quand la droite (4) reste, quel que soit a, dans quelque même plan fixe (*Cf.* 102, *inf.*).

99. Le cas excepté où la droite considérée reste parallèle à elle-même, la condition (6) est susceptible d'une interprétation à remarquer.

En supposant les axes rectangulaires, la plus courte distance de deux positions de la droite (4), projection, sur leur perpendiculaire commune, de la distance de deux points pris respectivement sur l'une et sur l'autre, de (x, y, z), (x', y', z') par exemple, est fournie par la valeur numérique de l'expression

$$\frac{(x'-x)(\eta\zeta'-\zeta\eta')+(y'-y)(\zeta\xi'-\xi\zeta')+(z'-z)(\xi\eta'-\eta\xi')}{\sqrt{(\eta\zeta'-\zeta\eta')^2+(\zeta\xi'-\xi\zeta')^2+(\xi\eta'-\eta\xi')^2}},$$

qui, en posant

$$x' = x + \Delta x, \qquad \ldots, \qquad \xi' = \xi + \Delta\xi, \qquad \ldots$$

se réduit à

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ \xi & \eta & \zeta \\ \Delta\xi & \Delta\eta & \Delta\zeta \end{vmatrix} : \sqrt{(\eta\,\Delta\zeta - \zeta\,\Delta\eta)^2 + \ldots}$$

Si maintenant on développe $\Delta x, \ldots, \Delta\xi, \ldots$ par la formule de Taylor, on trouvera facilement pour les deux premiers termes

de ce déterminant exprimé en série entière par rapport à Δa, variation correspondante du paramètre a,

$$\mathfrak{D}\Delta a^2 + \frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{D}}{da}\Delta a^3,$$

$\mathfrak{D}$ représentant le premier membre de l'équation (6), (258*, V). Il est donc, par rapport à Δa, un infiniment d'ordre 2 si cette équation n'a pas lieu, mais d'ordre 4 au moins, si elle est satisfaite, car l'identité $\mathfrak{D} = 0$ entraîne aussi $\frac{d\mathfrak{D}}{da} = 0$.

D'autre part, le radical figurant dans l'expression (7) est un infiniment petit d'ordre effectif 1, puisque les déterminants $\left(\eta_1 \frac{d\zeta}{da} - \zeta \frac{d\eta_1}{da}\right)$, $\cdots$ sont supposés ne pas s'évanouir identiquement à la fois. Il en résulte que *la plus courte distance de nos droites infiniment voisines est, par rapport à Δa, infiniment petite du premier ou du troisième ordre, selon que la droite mobile (4) n'a point d'enveloppe ou en possède une.* (Elle est évidemment nulle, quand ces droites passent toutes par un même point, ou bien sont toutes dans un même plan.)

Cette proposition due à M. Bouquet constitue une propriété générale des tangentes à une ligne gauche, car ces droites forment évidemment une famille à un paramètre représenté par la variable auxiliaire intervenant dans le troisième mode de représentation de la ligne.

La plus courte distance de deux droites (4) répondant aux valeurs a, $a + \Delta a$ du paramètre est ainsi représentée par une fonction de a, Δa, qui, dans certains cas et quelle que soit a, est infiniment petite par rapport à Δa, non du premier ordre, ni du second, mais du troisième. On s'en est étonné ; mais on ne prenait pas garde que cette fonction n'est pas l'accroissement correspondant à Δa, de quelque fonction de a seulement.

100. Quand l'une des équations (1), la première pour fixer les idées, ne contient pas le paramètre a, c'est-à-dire *quand la ligne mobile, située sans cesse sur une surface fixe*

(8) $$f_1(x, y, z) = 0,$$

naît de son intersection par une autre surface seule mobile

$$(9) \qquad f_2(x, y, z, a) = 0,$$

la première des équations adjointes (2) se réduit à une identité et la recherche de l'enveloppe n'exige plus que la résolution par rapport à x, y, z des équations (8), (9) et

$$(10) \qquad \frac{df_2}{da} = 0.$$

Comme il n'y a plus ainsi que trois équations pour déterminer trois inconnues, ce n'est pas la possibilité de leur résolution qui est maintenant le cas exceptionnel, c'est son impossibilité, et, *en général, quoique non nécessairement, il y a une enveloppe* dont les équations du premier mode s'obtiennent évidemment en adjoignant à l'équation (8) le résultat de l'élimination de a entre (9) et (10). Quand l'enveloppe existe, chaque enveloppée est évidemment coupée par l'enveloppée infiniment voisine, et les conclusions du n° 97 sont certainement applicables.

101. Une ligne variable du genre de (1) ayant toujours une certaine surface pour lieu géométrique (14), on peut s'étonner de nous entendre dire, en général au n° 96, qu'elle n'a pas d'enveloppe, dans le précédent, au contraire, qu'elle en a une; la contradiction n'est qu'apparente. D'une part, en effet, aucune de ces affirmations n'a été absolue; d'autre part, il résulte de la théorie des fonctions implicites et de l'élimination, que l'expression de a en fonction de x, y, z, à tirer de l'une ou de l'autre des équations (1) pour éliminer ce paramètre entre elles et former l'équation de la surface fixe engendrée par la ligne qu'elles représentent, cesse habituellement d'être olotrope pour les valeurs de ces quatre quantités qui annulent $\frac{df_1}{da}$, $\frac{df_2}{da}$; or ce sont justement les valeurs à considérer dans le calcul de l'enveloppe. La théorie générale se trouvant ainsi en défaut, on n'est plus fondé à en opposer les conséquences à celles d'un autre raisonnement.

102. Pour appliquer ces considérations au cas où la ligne mobile reste dans un plan fixe pris pour celui des xy, il suffit de

prendre pour les équations (1) celle de ce plan et

(11) $$f(x, y, a) = 0,$$

équation de la ligne considérée rapportée aux deux axes du même plan. On aperçoit immédiatement que l'enveloppe est représentée, soit par

$$x = \varphi(a), \qquad y = \chi(a),$$

formules de résolution par rapport à x, y des équations (11) et

$$\frac{df}{da} = 0,$$

soit par le résultat de l'élimination de a entre les mêmes équations.

Une ligne plane étant l'enveloppe de sa tangente, droite dépendant d'un seul paramètre, par exemple de la variable auxiliaire t en fonction de laquelle on peut exprimer les coordonnées d'un même point de la ligne, *le point de contact de chaque tangente est la position limite de la trace sur elle, de la tangente au point infiniment voisin* (97).

103. *Une ligne à deux paramètres a, b,*

(12) $$\begin{cases} f_1(x, y, z, a, b) = 0, \\ f_2(x, y, z, a, b) = 0, \end{cases}$$

a en général une surface enveloppe avec laquelle elle offre sans cesse un contact du premier ordre.

1. *La famille des lignes* (12) *se subdivise en une infinité de tribus à un seul paramètre, dans chacune desquelles ces lignes ont (en général) une enveloppe linéaire.*

On formera une tribu à un seul paramètre ϖ, en substituant deux fonctions quelconques de ϖ à a, b dans les équations générales (12). Et, pour que les lignes de cette tribu soient enveloppées par quelque ligne fixe, il faut, d'après le n° 96, que l'équation formée en éliminant x, y, z entre les équations (12) et ce qu'elles deviennent après une différentiation par rapport à ϖ,

(13) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial a}\dfrac{da}{d\varpi} + \dfrac{\partial f_1}{\partial b}\dfrac{db}{d\varpi} = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial a}\dfrac{da}{d\varpi} + \dfrac{\partial f_2}{\partial b}\dfrac{db}{d\varpi} = 0, \end{cases}$$

ait lieu quel que soit ϖ. On obtient ainsi un résultat de la forme

$$(14)\qquad \Omega\left(a,\, b,\, \frac{da}{d\varpi},\, \frac{db}{d\varpi}\right) = 0,$$

c'est-à-dire une certaine équation différentielle entre a, b considérés toujours comme deux fonctions inconnues de ϖ.

En prenant, pour a par exemple, une fonction de ϖ choisie arbitrairement $\mathfrak{a}(\varpi)$, l'intégration de cette équation, du premier ordre en b, donnera $b = \mathfrak{b}(\varpi,\, C)$, fonction déterminée de ϖ et d'une constante arbitraire C. La substitution de $\mathfrak{a}(\varpi)$, $\mathfrak{b}(\varpi,\, C)$ à a, b dans les équations (12) donnera, pour la famille des lignes considérées, cette autre représentation

$$\begin{cases} \mathfrak{f}_1(x,\, y,\, z,\, \varpi,\, C) = 0, \\ \mathfrak{f}_2(x,\, y,\, z,\, \varpi,\, C) = 0, \end{cases}$$

aux deux nouveaux paramètres ϖ, C; et maintenant, à chaque valeur de C, correspondra une tribu au seul paramètre ϖ, dont tous les membres seront enveloppés par la ligne au seul paramètre C, dont les équations résultent de l'élimination de ϖ entre les équations (12) et (13).

II. *La surface enveloppe cherchée est évidemment celle qu'engendre cette enveloppe linéaire au seul paramètre* C (14). On obtiendra visiblement les coordonnées de son point de contact avec l'enveloppée pour laquelle on a $a = \mathfrak{a}(\varpi)$, $b = \mathfrak{b}(\varpi,\, C)$, en résolvant par rapport à x, y, z les équations (12), (13), rendues compatibles par la relation (14); et, pour avoir les formules

$$(15)\qquad X = \varphi(a,\, b), \qquad Y = \chi(a,\, b), \qquad Z = \psi(a,\, b),$$

exprimant les mêmes coordonnées en fonction de a, b, c'est-à-dire les équations de la surface enveloppe appartenant au troisième mode, il est clair qu'il suffira de résoudre par rapport à x, y, z les mêmes équations (12) et celle-ci

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{da} & \dfrac{df_1}{db} \\[2mm] \dfrac{df_2}{da} & \dfrac{df_2}{db} \end{vmatrix} = 0$$

résultant de l'élimination de $\dfrac{da}{d\varpi}$, $\dfrac{db}{d\varpi}$ entre les relations (13).

III. Le nombre total 3 des équations (12) et (16) étant égal à celui des inconnues x, y, z, le fait normal est la possibilité de leur résolution. L'enveloppe existe donc en général, et, pour avoir son équation du premier mode, il suffira d'éliminer a, b, entre les mêmes équations.

104. L'enveloppe dégénère :

I. *En une ligne fixe que la ligne* (12) *rencontre quels que soient* a, b (une infinité de fois en chacun de ses points), quand les déterminants différentiels des fonctions (15) associées deux à deux sont tous trois identiquement nuls (13), ou bien, ce qui revient au même, quand l'élimination de a, b entre (12) et (16) peut se faire de deux manières seulement.

II. *En un assemblage de points fixes par lesquels la ligne* (12) *passe sans cesse*, quand les dérivées premières des mêmes fonctions (15) sont toutes identiquement nulles, ou bien, chose équivalente, quand l'élimination ci-dessus peut s'opérer de trois manières (*loc. cit.*).

104 *bis*. Dans tout ceci, nous avons supposé tacitement que le déterminant des coefficients de $\frac{da}{d\varpi}$, $\frac{db}{d\varpi}$, dans les équations (13), n'est pas identiquement nul. Quand le contraire a lieu, ces équations se réduisent à une seule formant avec (12) un système d'où, quelles que soient les fonctions de ϖ substituées à a, b, on pourra (en général) tirer, pour x, y, z, trois fonctions de ϖ représentant les coordonnées courantes d'une ligne enveloppe de la ligne (12), cette dernière ne dépendant plus alors que du seul paramètre ϖ.

En même temps, l'élimination de a, b, *simultanément*, entre les équations (12) devient possible (317*), et conduit à l'équation d'une surface fixe, contenant à la fois toutes les lignes (12) et leurs enveloppes mentionnées ci-dessus. Cette surface, lieu de ces enveloppes, représente ici l'enveloppe (superficielle) de la ligne proposée, puisque son équation peut être obtenue aussi bien par l'élimination de a, b entre les équations (12) et l'équation (16) dégénérée en une identité.

Surfaces à deux ou un paramètres.

105. *Une surface à deux paramètres a, b,*

$$(1)\qquad f(x, y, z, a, b) = 0,$$

a en général une surface enveloppe avec laquelle elle offre sans cesse un contact du premier ordre.

La surface représentée par les équations

$$(2)\qquad X = \varphi(a, b), \qquad Y = \chi(a, b), \qquad Z = \psi(a, b),$$

où φ, χ, ψ sont trois fonctions de a, b jouant ici le rôle de variables auxiliaires, aura toujours, en son point répondant aux valeurs actuelles de a, b, un contact du premier ordre avec la surface (1), si les trois conditions

$$(3)\qquad \begin{cases} f(X, Y, Z, a, b) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial X}\dfrac{dX}{da} + \dfrac{\partial f}{\partial Y}\dfrac{dY}{da} + \dfrac{\partial f}{\partial Z}\dfrac{dZ}{da} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial X}\dfrac{dX}{db} + \dfrac{\partial f}{\partial Y}\dfrac{dY}{db} + \dfrac{\partial f}{\partial Z}\dfrac{dZ}{db} = 0 \end{cases}$$

sont remplies (46).

Les résultats de la différentiation de la première, par rapport à a, b successivement, combinés avec les dernières, conduisent à

$$(4)\qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 0;$$

équations à associer à (1) pour déterminer X, Y, Z en fonctions de a, b, c'est-à-dire les trois fonctions φ, χ, ψ. L'exactitude de notre énoncé résulte de la possibilité habituelle de résoudre trois équations finies à trois inconnues seulement.

Cette résolution étant supposée praticable, l'enveloppe existe comme surface véritable si les déterminants différentiels des trois fonctions φ, χ, ψ, associées deux à deux ne sont pas tous identiquement nuls (13).

Si toutes les dérivées premières, par rapport à a, b, des mêmes fonctions sont nulles identiquement, l'enveloppe disparaît en réalité; mais alors les équations (2) représentent un assemblage

de points fixes par lesquels la surface (1) passe sans cesse, et que l'on considère encore, mais fictivement, comme constituant pour elle une enveloppe.

Si ce sont les déterminants différentiels seulement de φ, χ, ψ associés deux à deux qui s'évanouissent tous trois identiquement, l'enveloppe-surface disparaît encore; mais alors (*loc. cit.*) les équations (2) représentent une ligne fixe qui offre avec toutes les surfaces (1) des contacts du premier ordre évidents, et qui est pour elle une *enveloppe-ligne*.

On obtient évidemment l'équation de l'enveloppe, appartenant au premier mode, en éliminant a, b, entre les équations (1), (4). Sa dégénérescence en une ligne ou en un assemblage de points se manifeste alors par la possibilité d'opérer cette élimination de deux manières seulement ou de trois.

106. *L'enveloppe de la surface* (1) *est le lieu des positions limites des intersections de l'enveloppée par deux autres infiniment voisines, pourvu toutefois que celles-ci correspondent à des couples d'accroissements des paramètres*

$$h_1 = \mu_1 \varepsilon_1, \qquad k_1 = \nu_1 \varepsilon_1,$$
$$h_2 = \mu_2 \varepsilon_2, \qquad k_2 = \nu_2 \varepsilon_2,$$

ε_1, ε_2 *désignant deux quantités infiniment petites et* μ_1, ν_1, μ_2, ν_2 *quatre quantités finies dont la valeur numérique du déterminant* δ *a pour limite inférieure quelque quantité positive.*

Les coordonnées des points communs aux trois enveloppées infiniment voisines

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \qquad f(x, y, z, a + h_1, b + k_1) = 0,$$
$$f(x, y, z, a + h_2, b + k_2) = 0$$

satisfont évidemment aux trois équations

$$\left\{\begin{aligned} &f(x, y, z, a, b) = 0,\\ &h_1 \frac{df}{da} + k_1 \frac{df}{db} + \frac{h_1^2}{1.2} \frac{d^2 f}{da^2} + \ldots = 0,\\ &h_2 \frac{df}{da} + k_2 \frac{df}{db} + \ldots\ldots\ \ldots\ldots = 0.\end{aligned}\right.$$

dont les deux dernières peuvent être remplacées par

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta \frac{df}{da} + \ldots = 0,$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta \frac{df}{db} + \ldots = 0,$$

les termes sous-entendus étant tous divisibles par $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ et de degrés > 2 par rapport aux facteurs de ce produit.

Ces équations divisées par $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ donnent donc à la limite

$$\lim \left[\delta \frac{df}{da} \right] = \lim \left[\delta \frac{df}{db} \right] = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{df}{da} = 0, \qquad \frac{df}{db} = 0,$$

puisque, par hypothèse, δ reste numériquement supérieur à une quantité positive invariable qu'on peut assigner. D'où l'exactitude de notre proposition, à cause de la nature des équations de l'enveloppe (105).

La restriction relative à la variation de δ est identique à celle faite déjà aux nos 108***, 35, 64, 72 (*in fine*). Si la petitesse de δ n'était pas limitée, un point commun à trois enveloppées infiniment voisines pourrait tendre vers une position limite étrangère à l'enveloppe, ou même n'en avoir aucune.

Comme le plan tangent à une surface donnée dépend des deux variables auxiliaires, en fonctions desquelles s'expriment les coordonnées de son point de contact, comme, d'autre part, la surface est évidemment l'enveloppe de ce plan, *son point de contact est la position limite de la trace sur lui de l'intersection des plans tangents construits en deux points infiniment voisins, soumis toutefois à la restriction ci-dessus.*

107. *La surface à un seul paramètre a,*

$$(5) \qquad f(x, y, z, a) = 0,$$

a en général une surface enveloppe avec laquelle elle offre sans cesse un contact du premier ordre, en chaque point d'une ligne dépendant aussi de a.

En considérant a, t comme deux variables auxiliaires, trois

équations telles que

$$(6) \qquad X = \varphi(a, t), \qquad Y = \chi(a, t), \qquad Z = \psi(a, t)$$

représentent une certaine surface qui, en chaque point de la ligne représentée par les mêmes équations quand on y attribue à a la même valeur que dans l'équation (5), a un contact du premier ordre avec cette surface si l'on a, quelles que soient a, t (46),

$$(7) \qquad f(X, Y, Z, a) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial X}\frac{dX}{da} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{dY}{da} + \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{dZ}{da} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial X}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{dY}{dt} + \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{dZ}{dt} = 0.$$

Cette dernière condition étant satisfaite d'elle-même à cause de celle obtenue en différentiant la première par rapport à t, il reste seulement la première accompagnée de la seconde dont la combinaison avec celle-ci, différentiée par rapport à a, laisse à sa place

$$(8) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Si donc les fonctions φ, χ, ψ satisfont, quelle que soit t, aux équations (7), (8), la surface (6) sera l'enveloppe mentionnée dans notre énoncé; et, pour chaque valeur de a, sa ligne de contact avec la surface correspondante (5) sera représentée soit par les mêmes équations (6), a y étant fixée à cette valeur, soit évidemment encore par les équations (7), (8), prises simultanément.

Comme ici nous nous trouvons en présence de deux équations seulement à trois inconnues, la surface enveloppe existe en général, et son équation du premier mode se forme évidemment par l'élimination de a entre les équations (7), (8).

L'enveloppe disparaît quand ces équations sont incompatibles, ce qui peut arriver, et aussi quand elles représentent une ligne invariable, par suite de la possibilité d'éliminer a entre elles de deux manières; dans ce dernier cas, la surface (5), qui passe sans cesse par cette ligne, est dite encore l'avoir pour enveloppe.

108. Quand l'enveloppe existe et qu'elle est une véritable surface, elle est ainsi *circonscrite* à l'enveloppée dans chacune des

positions de celle-ci, suivant la ligne de contact dont nous avons parlé ci-dessus, et que l'on nomme la *caractéristique* de l'enveloppée; la caractéristique varie naturellement avec a, son paramètre unique, et engendre l'enveloppe dans ce mouvement (14).

En remettant maintenant x, y, z à la place de X, Y, Z, nous écrirons de nouveau les équations de la caractéristique

$$(9) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, a) = 0, \\ \dfrac{df}{da} = 0. \end{cases}$$

100. *La caractéristique, à son tour, est enveloppée par une certaine ligne fixe, du moins en général.*

Car ses équations (9) et celles à leur adjoindre d'après le n° 96,

$$\begin{cases} \dfrac{df}{da} = 0, \\ \dfrac{d}{da}\dfrac{df}{da} = \dfrac{d^2 f}{da^2} = 0, \end{cases}$$

se réduisent à trois seulement

$$(10) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, a) = 0, \\ \dfrac{df}{da} = 0, \\ \dfrac{d^2 f}{da^2} = 0, \end{cases}$$

pouvant habituellement être résolues par rapport à x, y, z.

Cette enveloppe (linéaire) de la caractéristique se nomme l'*arête de rebroussement* de l'enveloppe (superficielle) de la surface mobile (5). On obtient ses équations, soit du troisième mode avec a pour variable auxiliaire, en tirant des équations (10), comme nous venons de le dire, x, y, z en fonctions de a, soit du premier mode, en éliminant a de deux manières entre les mêmes équations.

Chaque point de l'arête de rebroussement est, en général, singulier pour la surface enveloppe; effectivement, pour avoir l'équation de cette dernière, il faut remplacer, dans la première des équations (9), a par son expression en x, y, z tirée de la seconde. Or, à cause de la troisième équation (10) qui a lieu en tout point de l'arête de rebroussement, cette expression cesse, en général,

d'être olotrope (321*) et, par suite, le premier membre de l'équation de l'enveloppe avec elle.

L'arête de rebroussement disparaît, même quand les équations (10) sont compatibles, si les fonctions de a qu'elles fournissent se réduisent à des constantes. L'enveloppée (5) et sa caractéristique (9) passent alors, quel que soit a, par les points fixes correspondants.

110. *Chaque enveloppée a un contact du second ordre avec l'arête de rebroussement.*

Soient, en effet,

$$(11) \qquad X = \Phi(a), \qquad Y = X(a), \qquad Z = \Psi(a)$$

les équations de l'arête, que la résolution des équations (10) fournit sous la troisième forme, comme nous l'avons dit ci-dessus. On a d'abord, en vertu de la première équation (10),

$$(12) \qquad f(X, Y, Z, a) = 0,$$

puis, en différentiant celle-ci une et deux fois,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial X}\frac{dX}{da} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{dY}{da} + \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{dZ}{da}\right] + \frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\left(\frac{dX}{da}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial Y\,\partial Z}\frac{dY}{da}\frac{dZ}{da} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X}\frac{d^2X}{da^2} + \ldots\right]$$
$$+ 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial X\,\partial a}\frac{dX}{da} + \ldots\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0.$$

La première de ces équations se réduit à

$$(13) \qquad \frac{\partial f}{\partial X}\frac{dX}{da} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{dY}{da} + \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{dZ}{da} = 0,$$

à cause de la seconde relation (10); la deuxième à

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\left(\frac{dX}{da}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial Y\,\partial Z}\frac{dY}{da}\frac{dZ}{da} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X}\frac{d^2X}{da^2} + \ldots = 0,$$

à cause de la troisième relation (10) et de l'équation (13) différentiée. Or, les relations (12), (13), (14) sont précisément les conditions d'un contact du second ordre en un point donné de la ligne (11), entre cette ligne et l'enveloppée (5) correspondant à une valeur numérique de a, égale à celle prise dans les équa-

tions (11) pour avoir les coordonnées du point considéré (55).

L'arête de rebroussement est donc, en quelque sorte, une enveloppe linéaire de la surface mobile (5); seulement, l'ordre du contact constant s'élève à 2. On arriverait aux mêmes conclusions, en cherchant directement cette enveloppe linéaire à contacts du second ordre.

111. *Chaque caractéristique est la position limite de l'intersection de l'enveloppée correspondante par l'enveloppée infiniment voisine.*

En raisonnant comme au n° 97, on prouve facilement que l'intersection des enveloppées répondant aux valeurs a, $a+h$ du paramètre a pour équations

$$\left\{\begin{aligned} &f=0,\\ &\frac{df}{da}+\frac{h}{1.2}\frac{d^2f}{da^2}+\ldots=0,\end{aligned}\right.$$

qui, pour h infiniment petit, ont les formes limites (9) appartenant à la caractéristique.

112. *Chaque point de l'arête de rebroussement est la position limite de l'intersection de l'enveloppée correspondante par deux autres infiniment voisines de celle-ci.*

Car, en appelant $h_1 \neq h_2$ deux quantités infiniment petites, ces trois enveloppées ont pour équations

$$\begin{aligned} &f=0,\\ &f+h_1\frac{df}{da}+\frac{h_1^2}{1.2}\frac{d^2f}{da^2}+\ldots=0,\\ &f+h_2\frac{df}{da}+\frac{h_2^2}{1.2}\frac{d^2f}{da^2}+\ldots=0.\end{aligned}$$

Les coordonnées de leurs points communs satisfont donc aux combinaisons évidentes de ces trois équations

$$\begin{aligned} &f=0,\\ &\frac{df}{da}+\frac{h_1}{1.2}\frac{d^2f}{da^2}+\ldots=0,\\ &\frac{1}{1.2}\frac{d^2f}{da^2}+\frac{h_1+h_2}{1.2.3}\frac{d^3f}{da^3}+\ldots=0,\end{aligned}$$

et celles de leurs positions limites aux formes limites de celles-ci,

qui sont précisément les équations (10) de l'arète de rebroussement.

On prouvera de même, que *chaque point de l'arête est la position limite de l'intersection d'une enveloppée par la caractéristique d'une autre infiniment voisine, ou bien encore d'une caractéristique par l'enveloppée contenant la caractéristique infiniment voisine; etc.*

Nous reviendrons longuement (150 *et suiv.*, *inf.*) sur le cas particulièrement intéressant où la surface mobile (5) se réduit à un simple plan.

113. *La surface au seul paramètre a, que représente l'équation* (1) *du n°* 105 *quand on attribue à b une valeur momentanément invariable, a une surface enveloppe, au seul paramètre b, qui a pour enveloppe celle même de la surface originaire, considérée de nouveau maintenant comme appartenant à une famille aux deux paramètres indépendants a, b.*

L'enveloppe de la surface originaire, considérée comme renfermant le seul paramètre a, a pour équation (108) le résultat de l'élimination de a entre les deux équations

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0; \tag{16}$$

et l'équation de l'enveloppe de cette dernière surface, maintenant au seul paramètre b, se forme en éliminant b, entre l'équation

$$f(x, y, z, A, b) = 0, \tag{17}$$

où A représente l'expression de a en x, y, z, b tirée de (16), et le résultat de la différentiation par rapport à b

$$\frac{\partial f}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial b} = 0,$$

que la même équation (16) réduit à

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 0, \tag{18}$$

c'est-à-dire en éliminant a, b entre les équations (15), (16), (18).

Or (105), c'est précisément refaire le calcul qui nous a conduit à l'équation de l'enveloppe de la surface originaire à deux paramètres indépendants.

On retrouverait évidemment la même surface enveloppe, en recommençant ces opérations sur la surface aux deux nouveaux paramètres α, β, *dont on formerait l'équation en substituant à* a, b, *dans celle de la surface originaire, deux fonctions déterminées quelconques de* α, β.

114. *La ligne, au seul paramètre* b, *que représentent les équations* (12) *du n° 103 quand* a *conserve quelque même valeur donnée, engendre une surface, au seul paramètre* a, *qui a précisément pour enveloppe* (107) *celle de la même ligne considérée maintenant comme impliquant les deux paramètres* a, b *au même titre.*

Pour obtenir effectivement l'équation de l'enveloppe de cette surface, il faut (14) tirer de la seconde équation de la ligne, par exemple, l'expression B de b en fonction de x, y, z, a, puis (107) éliminer a entre les équations

$$f_1(x, y, z, a, \mathrm{B}) = 0 \tag{19}$$

et

$$\frac{df_1}{da} = \frac{\partial f_1}{\partial a} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{B}}\frac{d\mathrm{B}}{da} = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} - \frac{\partial f_1}{\partial \mathrm{B}}\,\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial a}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial \mathrm{B}}} = 0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial a} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \mathrm{B}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial a} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \mathrm{B}} \end{vmatrix}, \tag{20}$$

à cause de l'identité

$$f_2(x, y, z, a, \mathrm{B}) = 0, \tag{21}$$

c'est-à-dire éliminer a, B entre (19), (20), (21), ce qui est précisément le calcul de l'enveloppe considérée au n° 103.

Plus généralement : *on retrouve la même enveloppe en substituant à* a, b *des fonctions quelconques de deux nouveaux paramètres* α, β, *puis cherchant l'enveloppe de la surface au seul paramètre* α, *que la ligne considérée engendre quand* β *seul varie.*

115. La réciproque de la proposition du n° 109 est exacte :

Toute ligne mobile à un seul paramètre

$$(22)\qquad \begin{cases} f_1(x, y, z, a) = 0, \\ f_2(x, y, z, a) = 0, \end{cases}$$

qui est douée d'une enveloppe (96), *peut être considérée comme appartenant à la caractéristique* (108) *de quelque surface mobile au même paramètre.*

Par hypothèse en effet, on peut trouver pour x, y, z trois fonctions de a satisfaisant identiquement aux quatre équations (22) et

$$\frac{df_1}{da} = \frac{df_2}{da} = 0.$$

Il existe donc quatre fonctions (non toutes identiquement nulles) de x, y, z, a considérées un instant comme variables toutes indépendantes, savoir Λ_1, Λ_2, $'\Lambda_1$, $'\Lambda_2$, qui donnent lieu à l'identité

$$(23)\qquad \Lambda_1 f_1 + \Lambda_2 f_2 + '\Lambda_1 \frac{df_1}{da} + '\Lambda_2 \frac{df_2}{da} = 0.$$

Car si, φ_1, φ_2, $'\varphi_1$ désignant trois nouvelles variables, on tire x, y, z des trois équations

$$f_1(x, y, z, a) = \varphi_1, \qquad f_2(x, y, z, a) = \varphi_2, \qquad \frac{df_1}{da} = {'\varphi_1},$$

par exemple, pour les porter dans $\frac{df_2}{da}$, le résultat $\left[\frac{df_2}{da}\right]$ de cette substitution s'évanouira quel que soit a pour $\varphi_1 = \varphi_2 = {'\varphi} = 0$. Le développement de cette fonction en série entière par rapport à φ_1, φ_2, $'\varphi_1$, $a - a_0$ donnera donc

$$\left[\frac{df_2}{da}\right] = \mathcal{L}_1 \varphi_1 + \mathcal{L}_2 \varphi_2 + '\mathcal{L}_1 {'\varphi_1}$$

$\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $'\mathcal{L}_1$ représentant certaines fonctions de φ_1, φ_2, $'\varphi_1$, a, puis, par le retour aux anciennes variables x, y, z, a, une identité analogue à (23).

Un système Λ_1, Λ_2, $'\Lambda_1$, $'\Lambda_2$ ayant été ainsi obtenu, considérons la surface mobile au paramètre a

$$'\Lambda_1 f_1 + '\Lambda_2 f_2 = 0.$$

Sa caractéristique est représentée par cette équation associée à

$$'\Lambda_1 \frac{df_1}{da} + '\Lambda_2 \frac{df_2}{da} + \frac{d'\Lambda_1}{da} f_1 + \frac{d'\Lambda_2}{da} f_2 = 0.$$

ou bien, en vertu de l'identité (23), par

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} &'\Lambda_1 f_1 + '\Lambda_2 f_2 = 0, \\ &\left(\frac{d'\Lambda_1}{da} - \Lambda_1\right) f_1 + \left(\frac{d'\Lambda_2}{da} - \Lambda_2\right) f_2 = 0, \end{aligned} \right.$$

système qui renferme les équations (22).

Les fonctions Λ_i, ... n'étant pas entièrement déterminées, il y a une infinité de surfaces mobiles ayant la ligne proposée pour caractéristique.

116. Nous rencontrerons plus d'une fois les figures enveloppes, dont les propriétés trouvent aussi des applications importantes en Cinématique et ailleurs.

En Optique, par exemple, le rayon lumineux d'un faisceau réfracté (ou réfléchi) dans un milieu homogène est une droite à deux paramètres, puisqu'il en passe en général une seule par chaque point de l'espace, et l'étude du phénomène comporte celle de la surface enveloppe de ces rayons (103) que l'on nomme la *caustique* du faisceau. Etc.

Nous n'avons considéré que des enveloppes ayant des contacts du premier ordre avec leurs enveloppées, et c'est la raison qui nous a fait rapprocher cette théorie du Chapitre précédent. Mais on pourrait tout aussi bien chercher une figure fixe ayant sans cesse un contact d'ordre donné quelconque, avec une figure mobile dépendant de paramètres en nombre suffisant. L'observation finale du n° 110 montre un exemple des questions de ce genre.



CHAPITRE V.

CONTACTS DU PREMIER ORDRE ENTRE LA SPHÈRE, OU LE CERCLE, ET DES FIGURES DONNÉES.

Normales et plans normaux.

117. *Une infinité de sphères offrent un contact du premier ordre avec une surface donnée, en un même point de celle-ci, et leurs centres ont pour lieu une droite qui est perpendiculaire au plan tangent construit à la surface, au point dont il s'agit.*

En adoptant des axes rectangulaires, comme nous le ferons dans tout ce Chapitre, une sphère de centre (a, b, c) et de rayon R aura pour équation

$$(1) \qquad (X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2-R^2=0,$$

et les conditions d'un contact du premier ordre au point (x, y, z), entre elle et la surface représentée par les équations du troisième mode

$$(2) \qquad x=\varphi(p, q), \qquad y=\chi(p, q), \qquad z=\psi(p, q),$$

se formuleront par les trois équations

$$(3) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0,$$

$$(4) \qquad (x-a)\frac{dx}{dp}+(y-b)\frac{dy}{dp}+(z-c)\frac{dz}{dp}=0,$$

$$(5) \qquad (x-a)\frac{dx}{dq}+(y-b)\frac{dy}{dq}+(z-c)\frac{dz}{dq}=0.$$

égalant à zéro, pour les valeurs de p, q fournissant le point considéré, le résultat de la substitution des fonctions (2) à X, Y, Z dans le premier membre de l'équation de la sphère et ses dérivées premières par rapport à p, q (46). La valeur de R étant sûrement

donnée par l'équation (3), après substitution à a, b, c de celles que fournit la résolution des équations (4), (5), le centre de la sphère cherchée est indéterminé sur la droite que représente le système de ces deux équations, quand on y considère a, b, c comme des coordonnées courantes. Et cette droite est perpendiculaire au plan tangent à la surface en (x, y, z), soit parce que les axes sont rectangulaires et que les déterminants des coefficients de a, b, c dans ses équations, sont précisément les coefficients $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ de l'équation de ce plan (75, *in fine*), soit encore parce qu'elle est un rayon pour toutes les sphères considérées, auxquelles ce plan est aussi tangent à cause du contact existant ainsi entre elles et la surface (76).

La droite que nous venons de trouver se nomme la *normale* à la surface, au point dont nous avons parlé et qui est son *pied*.

118. En représentant maintenant par X, Y, Z les coordonnées courantes des points de la normale, on trouvera immédiatement les formes suivantes pour ses équations.

I. Si l'équation de la surface est du premier mode, on aura pour la normale

$$\frac{X-x}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y-y}{\frac{df}{dy}} = \frac{Z-z}{\frac{df}{dz}}.$$

Car les équations (4), (5) donnent pour $(a-x)$, $(b-y)$, $(c-z)$ des quantités proportionnelles aux déterminants $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ qui le sont eux-mêmes aux dérivées partielles du premier membre de l'équation de la surface (6).

Les cosinus des angles formés par la normale avec les directions positives des axes ont alors pour expressions

$$\frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},\quad \frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\ldots\ldots}},\quad \frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\ldots\ldots}}.$$

II. Si l'équation de la surface est du deuxième mode, ces formules deviennent

$$\frac{X-x}{\frac{dz}{dx}} = \frac{Y-y}{\frac{dz}{dy}} = \frac{Z-z}{-1},$$

et

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}},\quad \frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\ldots\ldots}},\quad \frac{-1}{\sqrt{\ldots\ldots}}.$$

III. Si enfin la surface est représentée de la troisième manière, comme nous l'avons supposé dans le numéro précédent, on aura, pour la normale,

$$\frac{X-x}{\mathfrak{l}}=\frac{Y-y}{\mathfrak{m}}=\frac{Z-z}{\mathfrak{n}},$$

et, pour ses cosinus directeurs,

$$\frac{\mathfrak{l}}{\sqrt{\mathfrak{l}^2+\mathfrak{m}^2+\mathfrak{n}^2}},\quad \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{\ldots\ldots}},\quad \frac{\mathfrak{n}}{\sqrt{\ldots\ldots}},$$

les lettres $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ ayant toujours ici la même signification qu'aux n°s 6, 35, 75.

Dans chacun de ces groupes d'expressions des cosinus directeurs de la normale, figure un radical $\neq 0$ (2), (5) dont les deux déterminations distinguent les directions opposées à concevoir sur chaque normale. Et, comme au n° 84, où il s'agissait des tangentes à une même ligne, les deux directions de *l'ensemble* des normales à la surface seront spécifiées par les fonctions déterminées de x, y, ou bien de p, q, que donnent les expressions des alinéas II ou III, après attribution au radical correspondant de l'une ou de l'autre des valeurs initiales dont il est susceptible.

119. La normale jouit d'une propriété caractéristique à noter.

La distance d'un point fixe de l'espace à un point indéterminé de la surface est en général maximum ou minimum quand le second est le pied d'une normale issue du premier.

Car si (a, b, c), (x, y, z) représentent les coordonnées de ces points, les dernières exprimées au moyen des variables auxiliaires p, q, le carré de la distance en question est mesuré par

$$(5\ bis)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,$$

fonction de p, q dont le maximum ou minimum exige les deux

conditions (87***, II)

$$(6)\quad (x-a)\frac{dx}{dp}+(y-b)\frac{dy}{dp}+(z-c)\frac{dz}{dp}=(x-a)\frac{dx}{dq}+\ldots=0,$$

assurant précisément en (x, y, z) l'existence d'un contact du premier ordre entre la surface et une sphère passant par ce point avec (a, b, c) pour centre (87).

Mais ces conditions ne sont pas suffisantes, et l'on peut avoir tantôt un maximum, tantôt un minimum, tantôt ni l'un ni l'autre (210, *inf.*).

120. On nomme *plan normal* à une surface en un point donné, dit aussi son *pied*, tout plan mené par sa normale en ce point, perpendiculaire par suite sur son plan tangent au même point.

En un même point de la surface, celle-ci a donc une infinité de plans normaux, et chacun d'eux est évidemment le lieu des centres des cercles qui, en son pied, ont un contact du premier ordre avec elle.

121. *Une infinité de sphères offrent un contact du premier ordre avec une ligne donnée en un même point de celle-ci, et leurs centres ont pour lieu un plan qui est perpendiculaire à la tangente à la ligne, construite au point dont il s'agit.*

Car l'existence d'un semblable contact en (x, y, z), entre la sphère (1) et la ligne

$$(7)\qquad x=\varphi(t),\qquad y=\chi(t),\qquad z=\psi(t),$$

n'assujettit le centre de la première qu'à la condition

$$(8)\qquad (x-a)\frac{dx}{dt}+(y-b)\frac{dy}{dt}+(z-c)\frac{dz}{dt}=0\qquad (55),$$

représentant un plan quand on regarde a, b, c comme des coordonnées courantes. Et ce plan est perpendiculaire sur la tangente, parce que les axes sont rectangulaires et que les coefficients de a, b, c dans cette équation sont précisément ceux de la variable auxiliaire T dans celles de la tangente cotées (4) au n° 84, ou bien encore parce que cette tangente offre aussi un contact du premier

ordre avec toutes les sphères considérées (58) et qu'ainsi elle est perpendiculaire sur tous leurs rayons aboutissant à son point de contact.

Le plan en question se nomme le *plan normal* à la ligne au point dont nous parlons et qui est dit son *pied*. Il est aussi bien le lieu des centres des cercles ayant en son pied un contact du premier ordre avec la ligne, car toute sphère contenant un pareil cercle offre le même contact (58).

122. L'équation la plus usitée du plan normal à la ligne (7) est celle que nous avons déjà trouvée et que nous écrirons une seconde fois, en reprenant les lettres X, Y, Z pour représenter les coordonnées courantes,

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0.$$

Si la ligne était représentée par les équations (1) du n° 80 sa tangente le serait par les équations (2) du même numéro. On trouverait alors celle du plan normal sous la forme

$$\Delta_x(X-x)+\Delta_y(Y-y)+\Delta_z(Z-z)=0,$$

où Δ_x, Δ_y, Δ_z ont les mêmes significations qu'au n° 10.

123. *La distance d'un point fixe de l'espace à un point indéterminé de la ligne est en général maximum ou minimum quand le second est le pied d'un plan normal issu du premier.*

Cette proposition analogue à celle du n° 119 se démontre de la même manière, restant sujette aux mêmes aléas (180, *inf.*).

124. Une *normale* à la ligne, ayant pour *pied* un point donné de celle-ci, est toute droite menée par ce point dans le plan normal. En un même point de la ligne, il y a donc une infinité de normales, toutes perpendiculaires à la tangente.

Il est évident qu'une normale donnée dans un plan tangent à la ligne (87) est le lieu, dans ce plan, des centres soit des sphères soit des cercles ayant en son pied des contacts du premier ordre avec la ligne.

Dans des circonstances importantes (178, *inf.*), il y a lieu de

distinguer d'une manière spéciale celle des normales, en un point donné d'une ligne, qui est située dans son plan osculateur en ce même point (89); on la nomme la *normale principale* au point dont il s'agit.

125. Quand il s'agit d'une ligne plane et que l'on ne considère avec elle que des figures situées dans le même plan, le mot *normale,* tout court, s'applique à sa normale principale définie ci-dessus, c'est-à-dire à celle de toutes ses normales qui est située dans son propre plan (94).

Les équations de la tangente à une ligne plane trouvées au n° 92 donnent immédiatement pour celles correspondantes de la normale de pied (x, y), soit

$$\frac{X-x}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y-y}{\frac{df}{dy}},$$

soit

$$Y-y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x),$$

soit

$$dx(X-x)+dy(Y-y)=0;$$

dans cette dernière, nous avons simplifié l'écriture en mettant dx, dy au lieu de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$.

On a nommé *longueur de la normale* la portion de cette droite comprise entre son pied et l'axe des x, et *sous-normale* la projection (orthogonale) de ce segment sur le même axe. Les expressions de ces quantités sont

$$\pm y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad y\frac{dy}{dx},$$

respectivement.

Trajectoires orthogonales.

126. Toute figure dont on a en vue les intersections avec celles composant une même famille donnée (66) se nomme une *trajectoire* de ces dernières.

Quand, en un point commun à deux figures, le plan tangent à la première, si c'est une surface, ou sa tangente, si c'est une ligne, jouit par rapport à la seconde de la propriété *normale* définie dans le paragraphe précédent, réciproquement le plan tangent ou la tangente à la seconde jouit de la même propriété relativement à la première, et on dit que les deux figures se coupent *orthogonalement* en ce point.

En conséquence on nomme *trajectoire orthogonale* des figures d'une même famille, toute figure fixe coupant orthogonalement chacune des premières en un quelconque des points où elle la rencontre.

127. *Une famille de lignes à un paramètre* [*constituant ainsi les génératrices d'une certaine surface* (14)],

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(x, y, z, a) = 0, \\ f_2(x, y, z, a) = 0, \end{cases}$$

admet toujours pour trajectoires orthogonales une infinité de lignes dont les équations générales renferment aussi un seul paramètre indéterminé.

Soient

$$(2)\qquad X = \varphi(a), \qquad Y = \chi(a), \qquad Z = \psi(a)$$

les coordonnées d'un point pris sur la ligne, donnant par suite

$$(3)\qquad \begin{cases} f_1(X, Y, Z, a) = 0, \\ f_2(X, Y, Z, a) = 0, \end{cases}$$

quel que soit a. En considérant ce paramètre comme une variable auxiliaire, les équations (2) représentent une ligne dont la tangente fait avec les axes (puisque nous supposons ceux-ci rectangulaires) des angles à cosinus proportionnels aux dérivées

$$\frac{dX}{da}, \quad \frac{dY}{da}, \quad \frac{dZ}{da} \qquad (84).$$

Quant aux mêmes cosinus pour la tangente à la ligne (1) au point X, Y, Z, ils sont, d'après les équations (2) du n° 80, proportionnels aux déterminants différentiels

$$\Delta_X, \quad \Delta_Y, \quad \Delta_Z \qquad (10).$$

Pour que ces deux tangentes soient mutuellement perpendiculaires, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$\frac{dX}{da}\Delta_X + \frac{dY}{da}\Delta_Y + \frac{dZ}{da}\Delta_Z = 0,$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dX}{da} & \frac{dY}{da} & \frac{dZ}{da} \\ \frac{df_1}{dX} & \frac{df_1}{dY} & \frac{df_1}{dZ} \\ \frac{df_2}{dX} & \frac{df_2}{dY} & \frac{df_2}{dZ} \end{vmatrix} = 0.$$

Les fonctions X, Y, Z sont ainsi les intégrales du système mixte, à la variable indépendante a, formé par les trois équations (3), (4). La dernière seule étant différentielle et du premier ordre, les intégrales renferment une seule constante arbitraire (376*), (377*) jouant le rôle de paramètre indéterminé dans l'équation générale des trajectoires.

Les équations (3) montrent que toutes les trajectoires sont situées sur la surface engendrée par la ligne (1), ce qui était d'ailleurs évident. On pourrait encore trouver leurs équations générales, en employant les coordonnées curvilignes propres à la représentation des figures situées sur cette surface (16).

Il est évident que les lignes (1) sont réciproquement les trajectoires orthogonales de celles, à un seul paramètre aussi, que nous venons de leur trouver.

128. Quand la ligne (1) varie exclusivement dans le plan des xy, ses équations sont de la forme

$$\begin{cases} z = 0, \\ f(x, y, a) = 0, \end{cases}$$

et celles de ses trajectoires se réduisent à

$$\begin{cases} Z = 0, \\ f(X, Y, a) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial Y}\dfrac{dX}{da} - \dfrac{\partial f}{\partial X}\dfrac{dY}{da} = 0. \end{cases}$$

On fait naturellement abstraction de la première, et, habituellement, on réduit les deux dernières à une seule en prenant X

pour variable indépendante, ce qui permet d'écrire la troisième

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial X}\frac{dY}{dX} + \frac{\partial f}{\partial Y} = 0$$

à cause de

$$D_X Y = \frac{D_a Y}{D_a X} \qquad (332^*),$$

puis en portant, dans cette troisième ainsi transformée, l'expression de a en X, Y tirée de la seconde. Après cette élimination de a, l'intégration de l'équation fournit l'équation des trajectoires rentrant dans le premier mode.

129. Nous traiterons le cas où la ligne (1) se réduit à une simple droite mobile (engendrant ainsi une certaine surface réglée), en choisissant pour ses équations la forme

$$(6) \qquad X = x + \xi t, \qquad Y = y + \eta t, \qquad Z = z + \zeta t,$$

où t représente la variable auxiliaire propre à ce mode de représentation, et x, y, z, ξ, η, ζ six fonctions données de a, les trois dernières étant les cosinus directeurs de la droite, satisfaisant par suite, quel que soit a, à l'équation

$$(7) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Pour les intersections de la droite (6) avec une trajectoire déterminée quelconque, t est une fonction déterminée t de a, que fournira par exemple la résolution des équations en t naissant de la substitution des seconds membres de ces formules aux trois coordonnées respectivement, dans les équations de la trajectoire (premier mode). Si, inversement, t représente une fonction de a absolument indéterminée, les équations générales de toutes les trajectoires possibles des droites (6) seront

$$(8) \qquad X = x + \xi \mathrm{t}, \qquad Y = y + \eta \mathrm{t}, \qquad Z = z + \zeta \mathrm{t},$$

avec a pour variable auxiliaire.

Les cosinus directeurs de la tangente à cette ligne étant d'après le n° 84 proportionnels à

$$(9) \qquad \frac{dx}{da} + \xi\frac{d\mathrm{t}}{da} + \mathrm{t}\frac{d\xi}{da}, \quad \frac{dy}{da} + \eta\frac{d\mathrm{t}}{da} + \mathrm{t}\frac{d\eta}{da}, \quad \frac{dz}{da} + \zeta\frac{d\mathrm{t}}{da} + \mathrm{t}\frac{d\zeta}{da},$$

la trajectoire (8) sera orthogonale si la condition de perpendicu-

larité constante de cette tangente et de la direction (ξ, η, ζ) est remplie, c'est-à-dire si l'on a, quel que soit a,

$$\left(\xi\frac{dx}{da}+\eta\frac{dy}{da}+\zeta\frac{dz}{da}\right)+\frac{d\mathrm{t}}{da}=0;$$

car l'équation (7) réduit à 1 le coefficient de $\frac{d\mathrm{t}}{da}$, et le résultat de sa différentiation (par rapport à a),

$$\xi\frac{d\xi}{da}+\eta\frac{d\eta}{da}+\zeta\frac{d\zeta}{da}=0,$$

annule celui de t. On obtiendra donc toutes les trajectoires orthogonales en prenant pour t, dans les équations (8), toutes les déterminations de l'intégrale indéfinie

(10) $$\mathrm{t}=-\int\left(\xi\frac{dx}{da}+\eta\frac{dy}{da}+\zeta\frac{dz}{da}\right).$$

On notera les particularités suivantes :

I. *Le segment découpé sur la droite* (6) *par deux trajectoires déterminées quelconques conserve une longueur constante.*

Car si t_1, t_2 sont les déterminations correspondantes de t, et C quelque constante, la formule (10) donne $\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_1=C$, d'où les équations

$$\frac{X_2-X_1}{\xi}=\frac{Y_2-Y_1}{\eta}=\frac{Z_2-Z_1}{\zeta}=C,$$

chacun des rapports représentant la valeur du segment en question.

II. Si la droite (6), restant parallèle à elle-même, est la génératrice de quelque cylindre (144, *inf.*), ξ, η, ζ sont des constantes, et la même formule se réduit à

$$\mathrm{t}=-(\xi x+\eta y+\zeta z)+C,$$

moyennant quoi et la relation (7), les équations (8) des trajectoires, ajoutées membre à membre après multiplication par ξ, η, ζ respectivement, donnent simplement

(11) $$\xi X+\eta Y+\zeta Z=C,$$

équation de quelque plan perpendiculaire à la direction invariable

de la droite (6). Ici donc, *les trajectoires se réduisent aux sections du cylindre ci-dessus mentionné par tous les plans* (11) *perpendiculaires à ses génératrices.*

III. Quand le cylindre dont nous venons de parler n'est qu'un simple plan, les plans (11) le coupent suivant des droites perpendiculaires à la direction invariable des droites. *Les trajectoires orthogonales de droites parallèles dans un même plan sont donc toutes leurs perpendiculaires situées dans ce plan.*

IV. Si la droite (6) passe sans cesse par un point fixe x_0, y_0, z_0, cas auquel elle est la génératrice de quelque cône ayant ce point pour sommet (146, *inf.*), on peut prendre $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, d'où $\frac{dx}{da} = \frac{dy}{da} = \frac{dz}{da} = 0$. La formule (10) donne alors $\mathfrak{t} = C$, et les équations (8) de la trajectoire deviennent

$$X - x_0 = C\xi, \qquad Y - y_0 = C\eta, \qquad Z - z_0 = C\zeta.$$

En les ajoutant membre à membre après les avoir élevées au carré, on trouve

$$(12) \qquad (X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 = C^2,$$

équation d'une sphère de rayon indéterminé, mais de centre fixe (x_0, y_0, z_0). Maintenant donc, *les trajectoires se réduisent aux lignes sphériques sections du cône, lieu de la droite, par les sphères ayant son sommet pour centre.*

V. Quand le cône ci-dessus (IV) se réduit à un plan, les sphères (12) le coupent évidemment suivant des circonférences de même centre (x_0, y_0, z_0). *Les trajectoires orthogonales de droites rayonnant dans un plan, d'un même point fixe, sont donc les circonférences de ce plan qui ont le point considéré pour centre commun.*

130. La recherche des *lignes de plus grande pente* d'une surface donnée est un autre cas particulier du problème des trajectoires orthogonales d'une ligne à un paramètre. On nomme ainsi des lignes tracées sur elle, de manière que la tangente à chacune soit celle des tangentes à la surface au même point (78) qui fasse l'angle minimum avec la verticale.

Cette définition montre immédiatement que la tangente à une ligne de plus grande pente doit être perpendiculaire à l'intersection du plan tangent à la surface au même point par le plan horizontal, c'est-à-dire (88) à la tangente à la section de la surface faite par ce dernier plan. Les lignes de plus grande pente sont donc les trajectoires orthogonales des sections de la surface, faites par tous les plans horizontaux, sections portant le nom de *lignes de niveau*.

En prenant l'axe des z vertical, les équations générales des lignes de niveau sont évidemment

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ \quad z - a = 0, \end{cases}$$

équations de la surface et du plan horizontal de hauteur indéterminée a au-dessus du plan des xy. Pour avoir les équations des lignes de plus grande pente, il suffira donc d'appliquer à celles-ci la méthode générale indiquée pour le système (1).

131. La ligne (1) a aussi des trajectoires *obliques*, lignes coupant toutes les positions de la première en des points où les deux tangentes forment un angle donné V non droit, qu'on nomme l'*angle* des deux lignes. Ce calcul se fait de la même manière que pour les trajectoires orthogonales, à cela près qu'il faut substituer à l'équation (4) celle exprimant que le cosinus de l'angle des deux tangentes est égal, non à zéro, mais à $\cos V$. Rien n'est plus facile, parce que ce cosinus est représenté par une fraction ayant pour numérateur le premier membre de l'équation (4) et pour dénominateur le produit $\sqrt{\Delta_X^2 + \ldots} \times \sqrt{\left(\frac{dX}{da}\right)^2 + \ldots}$. Mais la présence de ces radicaux dans le second membre de la même équation complique singulièrement l'intégration.

132. Il y a pourtant un cas extrêmement facile ; c'est celui où *la ligne* (1) *se réduit à une droite de direction invariable*.

Pour la représenter, nous reviendrons aux équations (6) en y faisant indépendants de a les cosinus directeurs ξ, η, ζ, ce qui réduit à zéro les derniers termes des trinômes (9), en supposant en outre pour plus de simplicité que le point (x, y, z) appartient

à l'une des trajectoires orthogonales trouvées ci-dessus à cette droite, c'est-à-dire à quelque section droite du cylindre engendré par elle (129, II). On aura donc ainsi, quel que soit a,

$$\xi \frac{dx}{da} + \eta \frac{dy}{da} + \zeta \frac{dz}{da} = 0;$$

et, pour le cosinus de l'angle formé par la tangente à la trajectoire oblique cherchée avec la droite mobile, on trouvera facilement l'expression

$$\frac{d\mathrm{t}}{da} : \sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{t}}{da}\right)^2}$$
$$= \frac{d\mathrm{t}}{da} : \sqrt{\left(\frac{ds}{da}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{t}}{da}\right)^2},$$

en appelant s l'arc de la section droite du cylindre (20).

En égalant cette expression à $\cos V$, on obtient l'équation différentielle déterminant t, et devenant immédiatement

$$(13) \qquad \frac{d\mathrm{t}}{da} = \pm \cot V \cdot \frac{ds}{da},$$

d'où

$$(14) \qquad \mathrm{t} = \pm \cot V . s + C,$$

et l'on notera que, d'après les équations (8), t représente la longueur algébrique du segment de la génératrice mobile du cylindre, compris entre la section droite considérée et la trajectoire cherchée.

L'équation (14) *ramène immédiatement la recherche des trajectoires à la rectification de cette section droite.*

Elle montre que, *par chaque point du cylindre, on peut faire passer deux trajectoires*, que *toutes celles fournies par une même détermination du signe ambigu sont superposables les unes aux autres, par de simples translations exécutées parallèlement aux génératrices du cylindre,* puis enfin que *ces mêmes trajectoires sont, par rapport au plan de la section droite, les lignes symétriques de celles fournies par l'autre détermination.*

Pour $C = 0$, l'équation (14) donne les deux trajectoires passant

par l'origine des arcs de la section droite et montre qu'*à partir du plan de celle-ci, elles marquent sur la génératrice du cylindre les extrémités de deux segments d'une même longueur proportionnelle à l'arc de la section.*

Comme enfin, pour l'arc $\mathfrak{s}$ de la trajectoire, il vient immédiatement

$$\left(\frac{d\mathfrak{s}}{da}\right)^2 = \left(\frac{dx}{da} + \xi \frac{d\mathrm{t}}{da}\right)^2 + (\ldots)^2 + (\ldots)^2 = \left(\frac{ds}{da}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{t}}{da}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 V}\left(\frac{ds}{da}\right)^2,$$

en vertu de l'équation (13), ou bien encore

$$\frac{d\mathfrak{s}}{da} = \frac{1}{\sin V}\frac{ds}{da},$$

d'où

$$\mathfrak{s} = \frac{1}{\sin V} s,$$

si l'origine de $\mathfrak{s}$ coïncide avec celle de s, et si ces deux arcs croissent ou décroissent en même temps, *l'arc de la trajectoire, comme le segment de la génératrice, est encore proportionnel à l'arc correspondant de la section droite.* En résumé, *de leur origine commune à une même génératrice, les longueurs de l'arc de la section droite, de celui de la trajectoire et du segment découpé sur la génératrice par ces deux lignes sont constamment les côtés d'un triangle rectangle ayant égal* (*ou supplémentaire*) *à* V *son angle aigu adjacent à ce dernier côté.*

Ces trajectoires se nomment les *hélices d'inclinaison* V *tracées sur le cylindre dont nous avons parlé;* pour $V = 90°$, et à cause de $\mathrm{t} = C$, elles se confondent avec ses sections droites; pour $V = 0$, les formules (13) et suivantes sont illusoires, circonstance montrant qu'il n'existe alors aucune trajectoire pour laquelle t puisse être une fonction de a. Mais il est évident, et on pourrait le constater catégoriquement en employant pour la droite mobile la représentation du n° 127, que les trajectoires sont alors les diverses positions prises par cette droite elle-même; les génératrices d'un cylindre peuvent donc à un certain point de vue être regardées comme en étant des hélices.

En appliquant les considérations précédentes à un plan envisagé comme un cylindre ayant une section droite rectiligne, on

retrouve immédiatement que des *droites parallèles formant une famille plane ont d'autres droites parallèles dans le même plan pour trajectoires obliques d'inclinaison quelconque.*

133. Les *hélices* proprement dites sont celles des cylindres de révolution (144, 172, *inf.*). En appelant r le rayon d'un semblable cylindre dont l'axe coïncide avec celui des z, on aura $\xi = \eta = 0$ et $\zeta = +1$, par exemple : les équations de la section droite, supposée dans le plan des xy, pourront être (26)

$$x = r\cos a, \qquad y = r\sin a, \qquad z = 0,$$

d'où $s = ra$, en prenant le point $(r, 0, 0)$ pour origine des arcs et les supposant croître tous deux avec a, angle formé avec la partie positive de l'axe des x par la demi-droite allant de l'origine au point $(x, y, 0)$, puis $\mathrm{t} = \pm \cot V . ra + C$. Les hélices d'inclinaison V auront donc les équations

$$(15) \qquad x = r\cos a, \qquad y = r\sin a, \qquad z = \pm \cot V . ra - C$$

montrant immédiatement qu'*une simple rotation autour de l'axe du cylindre suffit encore pour superposer deux d'entre elles appartenant à la même détermination du signe ambigu.*

De cette observation et du numéro précédent, il résulte qu'*on peut réaliser la superposition de ces deux hélices en faisant coïncider un point arbitrairement choisi sur la première avec un point arbitrairement choisi sur l'autre.* Il suffit effectivement, pour cela, de faire tourner la première jusqu'à ce que le point marqué sur elle vienne sur la génératrice passant par le point marqué sur l'autre, puis d'imprimer à la première une translation amenant le premier point à coïncider avec l'autre.

D'où cette propriété de l'hélice, *de pouvoir être réappliquée sur elle-même en assurant la coïncidence de deux points arbitrairement placés sur elle*, c'est-à-dire de *pouvoir indéfiniment glisser sur elle-même.* C'est la base des applications de cette ligne aux Arts mécaniques. En supposant les parties positives des axes tellement dirigées, qu'un observateur ayant ses pieds à l'origine sur le plan des xy, sa tête sur la partie positive de l'axe des z, voie s'effectuer dans le sens *direct* (87**) le mouvement d'un point de la section droite pour lequel a croît sans cesse, le signe $+$ dans

les équations (15) (avec $\cot V > 0$) donne des hélices dites *dextrorsum;* le signe — donne des hélices dites *sinistrorsum.*

134. Des trajectoires obliques se présentent encore dans l'Art nautique. Les moyens *pratiques* dont disposent les marins pour régler la marche d'un navire imposent au bâtiment la nécessité de décrire des arcs successifs de *loxodromies,* lignes coupant chacune sous un même angle donné tous les méridiens terrestres qui constituent évidemment une famille à un paramètre. En conséquence, les cartes marines sont construites de manière que toutes les loxodromies de la sphère terrestre y soient représentées par des lignes droites conservant leurs angles.

135. *Une famille de surfaces à un paramètre,*

$$f(x, y, z, a) = 0, \tag{16}$$

admet toujours pour trajectoires orthogonales une infinité de lignes dont les équations générales contiennent deux paramètres indéterminés.

Si les formules (2) s'appliquent aux coordonnées d'un point (X, Y, Z) pris sur la surface (16), on aura d'abord à cause de cela

$$f(X, Y, Z, a) = 0, \tag{17}$$

quel que soit a, puis (84), (118),

$$\frac{\frac{dX}{da}}{\frac{\partial f}{\partial X}} = \frac{\frac{dY}{da}}{\frac{\partial f}{\partial Y}} = \frac{\frac{dZ}{da}}{\frac{\partial f}{\partial Z}}, \tag{18}$$

pour exprimer qu'au point considéré la tangente à la ligne (2) coïncide en direction absolument, par suite, avec la normale à la surface (16). Les trajectoires cherchées dépendent donc de l'intégration du système mixte (376*) à la variable indépendante a, aux fonctions inconnues X, Y, Z, que forment les équations (17), (18).

Ce système comprenant une équation finie (17) et deux équations différentielles du premier ordre (18), ses intégrales renfer-

meront deux constantes arbitraires, constituant les paramètres indéterminés assignés à la trajectoire par notre énoncé. Par chaque point de l'espace, passent ainsi au moins, non seulement une des surfaces (16), mais encore une de leurs trajectoires.

Par exemple, toutes les sphères de même centre fixe forment une famille de surfaces à un paramètre dont les trajectoires sont les droites issues de ce centre commun (140, *inf.*).

136. Dans le cas intéressant où la surface (16) se réduit à un plan, enveloppant généralement ainsi quelque surface développable (150, *inf.*), nous emploierons ses équations du troisième mode (7),

$$(19)\qquad X = x + \xi' p + \xi'' q, \qquad Y = y + \eta' p + \eta'' q, \qquad Z = z + \zeta' p + \zeta'' q,$$

où p, q sont les variables auxiliaires, et x, y, z, ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'' neuf fonctions données du paramètre a; et nous aurons avantage à supposer que les six dernières représentent les cosinus des angles formés avec les axes, par les directions de deux droites rectangulaires situées sans cesse dans le plan mobile, que l'on a ainsi, quel que soit a,

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1, \\ \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0, \\ \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1. \end{array}\right.$$

Comme ci-dessus (129), la question revient à trouver pour p, q deux fonctions $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ de a, telles, que leur substitution change les équations (19) en celles d'une ligne, dont la tangente, caractérisée par les quantités

$$(21)\qquad \frac{dx}{da} + \xi' \frac{d\mathfrak{p}}{da} + \xi'' \frac{d\mathfrak{q}}{da} + \mathfrak{p} \frac{d\xi'}{da} + \mathfrak{q} \frac{d\xi''}{da}, \quad \frac{dy}{da} + \ldots, \quad \frac{dz}{da} + \ldots,$$

soit perpendiculaire aux deux directions (ξ', η', ζ'), (ξ'', η'', ζ'') à la fois. En égalant à zéro les sommes des produits de ces quantités par ξ', η', ζ' et par ξ'', η'', ζ'', en tenant compte des relations (20) et de celles fournies par la différentiation des extrêmes,

$$\xi' \frac{d\xi'}{da} + \eta' \frac{d\eta'}{da} + \zeta' \frac{d\zeta'}{da} = \xi'' \frac{d\xi''}{da} + \eta'' \frac{d\eta''}{da} + \zeta'' \frac{d\zeta''}{da} = 0,$$

il vient les deux équations différentielles

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\xi'\frac{dx}{da}+\eta'\frac{dy}{da}+\zeta'\frac{dz}{da}\right)+\frac{d\mathfrak{p}}{da}+\left(\xi'\frac{d\xi''}{da}+\eta'\frac{d\eta''}{da}+\zeta'\frac{d\zeta''}{da}\right)\mathfrak{q}=0,\\ &\left(\xi''\frac{dx}{da}+\eta''\frac{dy}{da}+\zeta''\frac{dz}{da}\right)+\frac{d\mathfrak{q}}{da}+\left(\xi''\frac{d\xi'}{da}+\eta''\frac{d\eta'}{da}+\zeta''\frac{d\zeta'}{da}\right)\mathfrak{p}=0,\end{aligned}\right.$$

à intégrer pour avoir $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$. Les expressions générales de ces fonctions de a renferment ainsi deux constantes arbitraires, comme nous le savions déjà (135).

A cette solution générale, nous ajouterons les observations particulières qui suivent.

I. *Les traces de deux trajectoires déterminées quelconques sur le plan mobile* (19) *conservent une distance mutuelle constante.*

Si $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_2$ sont les paires de déterminations de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ qui ont fourni les deux trajectoires en question, les équations (22) donnent immédiatement

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d(\mathfrak{p}_2-\mathfrak{p}_1)}{da}+\left(\xi'\frac{d\xi''}{da}+\eta'\frac{d\eta''}{da}+\zeta'\frac{d\zeta''}{da}\right)(\mathfrak{q}_2-\mathfrak{q}_1)=0,\\ &\frac{d(\mathfrak{q}_2-\mathfrak{q}_1)}{da}+\left(\xi''\frac{d\xi'}{da}+\eta''\frac{d\eta'}{da}+\zeta''\frac{d\zeta'}{da}\right)(\mathfrak{p}_2-\mathfrak{p}_1)=0,\end{aligned}\right.$$

d'où, en ayant égard à

$$\left(\xi'\frac{d\xi''}{da}+\xi''\frac{d\xi'}{da}\right)+\ldots=0,$$

équation médiane du groupe (20) différentiée,

$$(\mathfrak{p}_2-\mathfrak{p}_1)\frac{d(\mathfrak{p}_2-\mathfrak{p}_1)}{da}+(\mathfrak{q}_2-\mathfrak{q}_1)\frac{d(\mathfrak{q}_2-\mathfrak{q}_1)}{da}=0,$$

puis, en intégrant et représentant par C quelque constante,

$$(23)\qquad (\mathfrak{p}_2-\mathfrak{p}_1)^2+(\mathfrak{q}_2-\mathfrak{q}_1)^2=\mathrm{C}.$$

En appelant donc (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) les fonctions de a fournies, pour les coordonnées courantes des deux trajectoires, par la substitution à p, q dans les équations (19), des paires de déterminations correspondantes de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, et, tenant compte des rela-

tions (20), (23), on trouve facilement

$$(24)\qquad (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2 = C,$$

ce qu'il y avait à constater.

Il en résulte immédiatement que *tout groupe déterminé de trajectoires, toute surface lieu d'une tribu de ces lignes, coupent le plan mobile* (19) *suivant une figure demeurant sans cesse superposable à elle-même.*

II. Quand le plan (19) reste parallèle à une droite fixe, on peut prendre pour ξ', η', ζ' les cosinus constants de cette direction; et, comme les dérivées par rapport à a, des coordonnées courantes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ d'une trajectoire donnée sont les expressions (21), la première des équations (22) peut s'écrire

$$\xi'\frac{d\mathfrak{X}}{da} + \eta'\frac{d\mathfrak{Y}}{da} + \zeta'\frac{d\mathfrak{Z}}{da} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$\xi'\mathfrak{X} + \eta'\mathfrak{Y} + \zeta'\mathfrak{Z} = C,$$

puisque ξ', η', ζ' sont des constantes.

Toutes les trajectoires sont donc des lignes planes, dont les plans sont perpendiculaires à la droite fixe à laquelle le plan mobile reste parallèle.

III. Quand il reste parallèle à un plan fixe, il jouit de la même propriété relativement à deux droites fixes prises dans ce dernier; par suite (II), chaque trajectoire est l'intersection de deux plans respectivement perpendiculaires à ces droites, c'est-à-dire *une droite perpendiculaire au plan fixe considéré.*

IV. Quand il passe sans cesse par un point fixe (x_0, y_0, z_0), on peut supposer, quel que soit a, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, d'où $\frac{dx}{da} = \frac{dy}{da} = \frac{dz}{da} = 0$, et, les équations (22) étant satisfaites alors par $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} = 0$, la relation (24) donne

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 = C.$$

Toute trajectoire est donc une ligne sphérique dont la sphère a (x_0, y_0, z_0) *pour centre.*

137. Réciproquement, les surfaces (16) à un paramètre sont

évidemment des trajectoires orthogonales, relativement aux lignes à deux paramètres que nous venons de leur trouver pour trajectoires orthogonales linéaires. Mais *une famille de lignes à deux paramètres n'a pas toujours des surfaces trajectoires orthogonales,* ce que nous allons constater en traitant la question suivante.

Une ligne à deux paramètres a, b étant donnée par les équations

$$(25)\qquad X = \varphi(t, a, b), \qquad Y = \chi(t, a, b), \qquad Z = \psi(t, a, b),$$

où t désigne la variable auxiliaire, propre au troisième mode de représentation, et φ, χ, ψ, trois fonctions données de t, a, b, lui trouver, quand il en existe, des surfaces trajectoires orthogonales.

Après avoir noté que la tangente à cette ligne fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$(26)\qquad \frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{d\chi}{dt},\quad \frac{d\psi}{dt},$$

substituons à t une certaine fonction de a, b, que nous représenterons par t. Les équations (25) deviennent

$$(27)\qquad X = \varphi(\mathrm{t}, a, b), \qquad Y = \chi(\mathrm{t}, a, b), \qquad Z = \psi(\mathrm{t}, a, b)$$

et représentent maintenant une surface aux variables auxiliaires a, b, dont le point répondant à des valeurs particulières données de ces variables coïncide évidemment avec celui qu'on obtient sur la ligne (25) en prenant $t = \mathrm{t}$.

D'ailleurs (118, III), les cosinus directeurs de la normale à cette surface au point considéré sont proportionnels aux déterminants $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ des trois paires de colonnes du tableau

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{d\mathrm{t}}{da} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial a}, & \dfrac{\partial\chi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{d\mathrm{t}}{da} + \dfrac{\partial\chi}{\partial a}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{d\mathrm{t}}{da} + \dfrac{\partial\psi}{\partial a}, \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{d\mathrm{t}}{db} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial b}, & \dfrac{\partial\chi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{d\mathrm{t}}{db} + \dfrac{\partial\chi}{\partial b}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{d\mathrm{t}}{db} + \dfrac{\partial\psi}{\partial b}. \end{matrix}$$

Par suite, pour que la ligne (25) et la surface (27) se coupent toujours orthogonalement, il faut et il suffit que, pour $t = \mathrm{t}$, les quantités (26) soient proportionnelles à $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, quels que

soient a, b, ce qui donne facilement les relations

$$(28)\quad \begin{cases} \left[\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{t}}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial \mathrm{t}}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}\right)^2\right]\dfrac{d\mathrm{t}}{da}+\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}+\dfrac{\partial\chi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{\partial\chi}{\partial a}+\dfrac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{\partial\psi}{\partial a}\right]=0, \\ \left[\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{t}}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial \mathrm{t}}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}\right)^2\right]\dfrac{d\mathrm{t}}{db}+\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial b}+\dfrac{\partial\chi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{\partial\chi}{\partial b}+\dfrac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}\dfrac{\partial\psi}{\partial b}\right]=0. \end{cases}$$

Ce sont les équations dont dépend le calcul de la fonction t et par suite celui des trajectoires cherchées. Comme elles constituent un système d'équations différentielles totales à *deux* variables indépendantes a, b, elles n'ont pas nécessairement des intégrales (380*, II, III). En conséquence, *le problème dont nous nous occupons n'est pas toujours résoluble.*

Cependant les surfaces trajectoires existent dans l'un ou l'autre des cas suivants.

I. *Quand le système* (28) *est passif* (297*), (299*), c'est-à-dire quand on a, quelles que soient a, b, t considérées comme trois variables indépendantes, la condition de passivité

$$(29)\quad \begin{cases} (\mathrm{t}a)\left[\dfrac{d(\mathrm{t}b)}{d\mathrm{t}}-\dfrac{d(\mathrm{tt})}{db}\right] \\ \qquad +(\mathrm{t}b)\left[\dfrac{d(\mathrm{tt})}{da}-\dfrac{d(\mathrm{t}a)}{d\mathrm{t}}\right]+(\mathrm{tt})\left[\dfrac{d(\mathrm{t}a)}{db}-\dfrac{d(\mathrm{t}b)}{da}\right]=0, \end{cases}$$

où (tt), $(\mathrm{t}a)$, $(\mathrm{t}b)$ représentent, pour abréger, les expressions entre crochets dans ces équations.

Il existe alors une intégrale générale renfermant une constante arbitraire (383*) et, par suite, *une infinité de surfaces trajectoires, dont l'équation générale contient ce paramètre unique.* Par chaque point de l'espace on peut faire passer une au moins de ces surfaces.

II. *Quand, même non passif, le système* (28) *admet quelque intégrale exceptionnelle* (297*), (380*), (405*), les surfaces trajectoires sont alors isolées, et leur ensemble ne forme plus une famille.

Il n'y a pas lieu de discuter les intégrales singulières que les équations (28) pourraient admettre; car une intégrale de cette sorte (288*), soit en donnant $(\mathrm{tt}) = 0$ (250*, III), d'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{t}}=\frac{\partial\chi}{\partial \mathrm{t}}=\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}=0,$$

puisqu'il s'agit de quantités réelles, soit d'une autre manière, ne pourrait correspondre qu'aux points singuliers des lignes (25), que nous avons rigoureusement exclus de toutes nos théories.

138. Le cas où la ligne variable considérée est toujours droite, formant par l'ensemble de ses diverses positions ce que l'on nomme une *congruence*, mérite une attention spéciale. On peut alors supposer aux équations (25) les formes, linéaires en t,

$$(30)\qquad X = x + \xi t, \qquad Y = y + \eta t, \qquad Z = z + \zeta t,$$

où x, y, z, ξ, η, ζ sont des fonctions données de a, b, dont la nature dépend des circonstances, et dont les trois dernières sont les cosinus directeurs de la droite.

Comme on a ainsi, quels que soient a, b,

$$(31)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

d'où

$$(32)\qquad \xi\frac{d\xi}{da} + \eta\frac{d\eta}{da} + \zeta\frac{d\zeta}{da} = \xi\frac{d\xi}{db} + \eta\frac{d\eta}{db} + \zeta\frac{d\zeta}{db} = 0,$$

il reste

$$(33)\quad (\mathrm{t}a) = \xi\frac{dx}{da} + \eta\frac{dy}{da} + \zeta\frac{dz}{da}, \qquad (\mathrm{t}b) = \xi\frac{dx}{db} + \eta\frac{dy}{db} + \zeta\frac{dz}{db}, \qquad (\mathrm{tt}) = 1,$$

et les expressions entre crochets dans les équations (28) ne renferment plus la fonction inconnue t.

La condition de passivité, ne pouvant ainsi la contenir, ne peut être transformée en une équation identique entre a et b par la substitution à t d'aucune fonction de ces deux variables, et aucune intégrale exceptionnelle ne saurait exister (403*).

Si donc il y a une seule trajectoire, la condition de passivité, devenue condition d'intégrabilité, est remplie (208*), *et il en existe nécessairement une infinité d'autres.*

Le calcul des trajectoires s'abaisse à l'intégration de la différentielle totale exacte

$$(34)\qquad d\mathrm{t} = (\mathrm{t}a)\,da + (\mathrm{t}b)\,db,$$

aux deux variables a, b.

Ici la condition d'intégrabilité (29) se simplifie beaucoup, car

les relations (33) la réduisent à

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d(\mathrm{t}a)}{db} - \frac{d(\mathrm{t}b)}{da} + \left(\frac{dx}{da}\frac{d\xi}{db} + \frac{dy}{da}\frac{d\eta}{db} + \frac{dz}{da}\frac{d\zeta}{db}\right) \\ &\qquad\qquad - \left(\frac{dx}{db}\frac{d\xi}{da} + \frac{dy}{db}\frac{d\eta}{da} + \frac{dz}{db}\frac{d\zeta}{da}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

(quels que soient a, b).

139. Il résulte encore de la nature particulière de la question, que *deux quelconques des trajectoires découpent sur toutes les droites* (30) *des segments de même longueur*. Car si t_1, t_2 sont les déterminations de t qui correspondent aux deux surfaces, l'équation (34) montre immédiatement que $\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1$ est indépendante de a, b. Or, en vertu des équations (27) ayant ici la forme (30), cette différence est égale à

$$\frac{X_2 - X_1}{\xi} = \frac{Y_2 - Y_1}{\eta} = \frac{Z_2 - Z_1}{\zeta},$$

valeur du segment intercepté par les deux trajectoires sur la droite courante de la famille considérée.

Nous n'insisterons pas sur les propriétés générales d'une congruence de droites douées de trajectoires orthogonales ; ce sont évidemment celles des normales à une même surface, dont nous rencontrerons la principale à la fin du Chapitre VIII (*inf.*).

140. Quand la droite (30) passe sans cesse par un point fixe (x_0, y_0, z_0), on peut supposer $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, d'où $\frac{dx}{da} = \frac{dy}{da} = \frac{dz}{da} = \frac{dx}{db} = \ldots = 0$, quels que soient a, b. On voit immédiatement alors, que la condition essentielle (35) est satisfaite, puis que les relations (33) réduisent l'équation (34) à $d\mathrm{t} = 0$, d'où $\mathrm{t} = \mathrm{C}$, moyennant quoi les équations (30) donnent facilement pour les trajectoires

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 = \mathrm{C}^2.$$

Ces surfaces sont donc toutes les sphères qui ont (x_0, y_0, z_0) *pour centre commun.*

Quand la même droite reste parallèle à elle-même, on reconnaîtra, plus facilement encore, que *les trajectoires se réduisent aux plans perpendiculaires à cette direction* (*Cf.* 136, III).

141. La position de la normale à une surface donnée dépend de deux paramètres, par exemple des deux variables auxiliaires en fonction desquelles les coordonnées de son pied peuvent être exprimées; mais, comme nous venons de le voir, un faisceau de droites à deux paramètres ne peut pas toujours être considéré comme l'ensemble des normales à quelque même surface; il faut pour cela que l'identité (35) ait lieu. Le théorème suivant, dû aux recherches de Malus, Dupin, Sturm et Gergonne, et très utile en Optique, assigne un cas remarquable où il en est ainsi.

Des rayons lumineux se propageant dans un milieu isotrope homogène, normalement à une même surface, puis se réfractant suivant les lois de Descartes dans un autre milieu de même nature, séparé du premier par une surface quelconque (ou bien se réfléchissant sur un miroir quelconque), restent normaux à quelque autre surface.

Désignant par v_1, v_2 les vitesses absolues de la lumière dans les milieux où cheminent respectivement les rayons incidents et les rayons réfractés, nous nommerons

$$x = \varphi(a, b), \qquad y = \chi(a, b), \qquad z = \psi(a, b)$$

les coordonnées du point d'incidence du rayon correspondant aux valeurs a, b de ses deux paramètres, moyennant quoi, en considérant a, b comme des variables auxiliaires, ces équations représentent précisément la surface de séparation des deux milieux, ou *lentille*. Nous nommerons ensuite ξ, η, ζ les cosinus des angles formés avec les axes par la direction de la normale à la lentille allant de son pied à l'infini dans le premier milieu, puis ξ_1, η_1, ζ_1 les mêmes cosinus pour la direction du mouvement de la lumière sur le rayon incident de même *pied* (point d'incidence), puis enfin ξ_2, η_2, ζ_2 les cosinus analogues pour celle du mouvement de la lumière sur le rayon réfracté.

Les cosinus ξ, η, ζ étant proportionnels aux déterminants différentiels l, m, n des trois fonctions φ, χ, ψ associées deux à deux, on a d'abord, quels que soient a, b,

$$(36) \qquad \xi\frac{dx}{da} + \eta\frac{dy}{da} + \zeta\frac{dz}{da} = \xi\frac{dx}{db} + \eta\frac{dy}{db} + \zeta\frac{dz}{db} = 0.$$

L'existence de quelque plan contenant à la fois la normale à la

lentille, le rayon incident de même pied et le rayon réfracté, assure ensuite celle de la relation

$$(37)\qquad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

La proportionnalité des sinus des angles d'incidence et de réfraction aux vitesses absolues de la lumière dans les deux milieux donne facilement enfin

$$(38)\qquad \frac{(\eta\zeta_1 - \eta_1\zeta)^2 + (\zeta\xi_1 - \zeta_1\xi)^2 + (\xi\eta_1 - \xi_1\eta)^2}{(\eta\zeta_2 - \eta_2\zeta)^2 + (\zeta\xi_2 - \zeta_2\xi)^2 + (\xi\eta_2 - \xi_2\eta)^2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}.$$

De l'équation (37) on tire immédiatement

$$(39)\qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_1(\eta\zeta_1 - \eta_1\zeta) + \eta_1(\zeta\xi_1 - \zeta_1\xi) + \zeta_1(\xi\eta_1 - \xi_1\eta) = 0, \\ \xi_2(\eta\zeta_1 - \eta_1\zeta) + \eta_2(\zeta\xi_1 - \zeta_1\xi) + \zeta_2(\xi\eta_1 - \xi_1\eta) = 0, \end{aligned} \right.$$

et aussi bien

$$(40)\qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_1(\eta\zeta_2 - \eta_2\zeta) + \eta_1(\zeta\xi_2 - \zeta_2\xi) + \zeta_1(\xi\eta_2 - \xi_2\eta) = 0, \\ \xi_2(\eta\zeta_2 - \eta_2\zeta) + \eta_2(\zeta\xi_2 - \zeta_2\xi) + \zeta_2(\xi\eta_2 - \xi_2\eta) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on avait, quels que fussent a, b,

$$(41)\qquad \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1 = \zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1 = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1,$$

le rayon réfracté serait situé sur la même droite que le rayon incident, et, ou bien, celui-ci serait sans cesse normal à la lentille, ou bien aucune différence optique n'existerait entre les milieux. En exceptant donc ces deux cas sans intérêt, où d'ailleurs le dispositif de notre énoncé est évident, la non-nullité simultanée des trois déterminants (41) exige qu'en considérant comme des inconnues les déterminants entre parenthèses dans les équations (39), (40), ces deux systèmes aux mêmes coefficients fournissent pour eux des valeurs respectivement proportionnelles. Cette proportionnalité combinée avec la relation (38) donne

$$\frac{\eta\zeta_1 - \eta_1\zeta}{\eta\zeta_2 - \eta_2\zeta} = \frac{\zeta\xi_1 - \zeta_1\xi}{\zeta\xi_2 - \zeta_2\xi} = \frac{\xi\eta_1 - \xi_1\eta}{\xi\eta_2 - \xi_2\eta} = \pm\frac{v_1}{v_2},$$

et les circonstances physiques du phénomène, consistant en ce que le prolongement du rayon incident au delà de son pied et le rayon réfracté se trouvent toujours du même côté de la normale à la

lentille dans le plan de ces trois droites, montrent facilement qu'il faut adopter le signe + (pour la réflexion, il suffirait de prendre $v_2 = v_1$ et d'adopter le signe —). Cela fait, l'égalisation des trois premiers rapports au dernier conduit immédiatement à

$$(42)\qquad \frac{\xi_1}{v_1} - \frac{\xi_2}{v_2} = K\xi, \qquad \frac{\eta_1}{v_1} - \frac{\eta_2}{v_2} = K\eta, \qquad \frac{\zeta_1}{v_1} - \frac{\zeta_2}{v_2} = K\zeta,$$

K étant une certaine fonction de a, b.

Si maintenant on représente par [0] le premier membre de la condition (35) et par [1], [2] ce qu'il devient quand, à ξ, η, ζ, on substitue d'abord ξ_1, η_1, ζ_1, ensuite ξ_2, η_2, ζ_2, on trouvera, en vertu des relations (36) et (42),

$$(43)\qquad \frac{1}{v_1}[1] - \frac{1}{v_2}[2] = K[0].$$

On a, d'autre part (138),

$$[0] = 0,$$

parce que ξ, η, ζ sont les cosinus directeurs de la normale à quelque surface (la lentille), puis

$$[1] = 0,$$

parce que le rayon incident est supposé demeurer sans cesse normal aussi à une certaine surface; il reste donc

$$[2] = 0,$$

ce qui démontre notre théorème.

Voici une remarque fort intéressante à lui ajouter. En appelant x_1, y_1, z_1 les fonctions de a, b représentant les coordonnées du pied du rayon incident sur une *onde incidente*, c'est-à-dire sur l'une des surfaces auxquelles il demeure normal dans le premier milieu, et ρ_1 la longueur absolue du chemin que la lumière parcourt sur ce rayon, en passant de l'onde incidente à la lentille, on a

$$x - x_1 = \xi_1\rho_1, \qquad y - y_1 = \eta_1\rho_1, \qquad z - z_1 = \zeta_1\rho_1,$$

d'où, en différentiant par rapport à a, ajoutant membre à membre après multiplication par ξ_1, η_1, ζ_1 et ayant égard aux relations (31),

(32), (36) pour l'onde incidente

$$\frac{d\rho_1}{da} = \xi_1 \frac{dx}{da} + \eta_1 \frac{dy}{da} + \zeta_1 \frac{dz}{da}.$$

En représentant encore par ρ_2 la longueur du chemin parcouru, sur le rayon réfracté, par la lumière passant de la lentille à une onde réfractée déterminée, on trouve de la même manière

$$\frac{d\rho_2}{da} = -\xi_2 \frac{dx}{da} - \eta_2 \frac{dy}{da} - \zeta_2 \frac{dz}{da}.$$

Si maintenant on ajoute membre à membre ces deux formules divisées par v_1, v_2, et si l'on combine le résultat avec celui de l'addition membre à membre des relations (42) multipliées par $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da}$, il reste, en tenant compte de la première des équations (36),

$$\frac{d}{da}\left(\frac{\rho_1}{v_1} + \frac{\rho_2}{v_2}\right) = 0,$$

et de même

$$\frac{d}{db}\left(\frac{\rho_1}{v_1} + \frac{\rho_2}{v_2}\right) = 0.$$

D'où l'on conclut, en intégrant par rapport à a, b,

$$\frac{\rho_1}{v_1} + \frac{\rho_2}{v_2} = C.$$

En d'autres termes, *il y a pour tous les rayons le même nombre de longueurs d'ondulation entre une onde incidente et une onde réfractée;* ce que l'on exprime encore en disant que, *d'une onde incidente à une onde réfractée, la lumière parcourt sur deux rayons quelconques des chemins optiquement équivalents.*

142. La condition, pour une ligne trajectoire, de rencontrer sans cesse une ligne dépendant d'un seul paramètre, lui impose la condition évidente d'être située tout entière sur la surface engendrée par la seconde, impose par suite à sa tangente celle d'appartenir au plan tangent à cette surface (88). En chaque point de la ligne mobile, on parachève donc (sauf ambiguïté) la détermination de la tangente à la trajectoire, en l'assujettissant à faire un angle donné, même non droit, avec celle de cette ligne mobile,

et c'est ce qui permet, comme nous l'avons expliqué au n° 131, de former les équations de ces trajectoires *obliques*. Mais, pour une surface à un paramètre, il n'en est plus ainsi, parce que la tangente à la ligne trajectoire que l'on voudrait chercher est laissée, non pas dans une simple ambiguïté, mais dans une indétermination véritable, par la condition unique de faire un angle donné *non droit* avec le plan tangent construit au même point de la surface. Pour faire naître des trajectoires *obliques,* il faudrait compléter la détermination de la tangente en chacun de leurs points par quelque condition accessoire, comme serait par exemple celle de rester parallèle à un plan fixe.

Une observation du même genre est applicable au problème des surfaces trajectoires *obliques* d'une ligne à deux paramètres.

Mais la propriété *normale* que nous avons fait intervenir au n° 126 n'est au fond, pour les droites et plans tangents qu'elle concerne, que celle d'être *conjugués* en directions par rapport à toute sphère; si donc, au lieu de cette disposition mutuelle *normale,* on leur imposait celle d'être aussi conjugués relativement à *toute autre surface du deuxième degré à centre donnée,* les mêmes calculs conduiraient à d'autres figures trajectoires dont les propriétés seraient une généralisation de celles des trajectoires orthogonales.

Par l'emploi du même moyen, on élargirait dans le même sens les propriétés de la normale, du plan normal et aussi du cercle osculateur, de la droite et de la surface polaires, de la sphère osculatrice, des développées, des lignes de courbures, etc., etc., dont nous aurons successivement à parler. Cette observation nous paraît aider à bien apprécier la nature spéciale du rôle dominant que ces diverses figures jouent dans toute la Géométrie.

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS SAILLANTES DES SURFACES USUELLES.

Cylindres et cônes.

143. Dans le voisinage de son point de contact, le plan tangent à une surface se confond avec elle à un infiniment petit du second ordre près (74). Cette propriété, combinée avec la simplicité extrême et la constance de la forme du plan, assigne au plan tangent d'une surface le premier rang parmi les éléments accessoires dont la discussion procure la conception nette de sa configuration. A cela, il faut ajouter la capacité, pour la vue et le toucher, de percevoir immédiatement l'existence d'un contact, la quasi-impossibilité, au contraire, d'apprécier s'il passe le premier ordre; c'est pourquoi le plan tangent, comme la plus simple des génératrices possibles, joue un si grand rôle dans l'étude des surfaces et dans leur classification.

Les surfaces qui interviennent le plus souvent dans les recherches théoriques et aussi bien dans toutes les applications de la Géométrie sont naturellement celles qui admettent comme génératrices les lignes les plus simples, savoir la droite ou la circonférence, et dont nous allons étudier les principales.

144. Un *cylindre* est toute surface admettant pour génératrice (14) une droite restant, pendant son mouvement, sans cesse parallèle à quelque droite fixe donnée; de là résulte la propriété d'une pareille surface, si utile dans les Arts de construction, *de rester en coïncidence avec elle-même, après toute translation subie parallèlement à cette droite fixe.*

Le plan est une variété du cylindre, et la plus simple de toutes.

En appelant

$$P_1, \quad Q_1, \quad R_1,$$
$$P_2, \quad Q_2, \quad R_2$$

six constantes dont les déterminants p, q, r peuvent servir de paramètres de direction à la droite fixe donnée, les équations générales d'une droite parallèle à la direction (p, q, r), mais à un seul paramètre a, sont évidemment de la forme

$$\begin{cases} P_1 x + Q_1 y + R_1 z + S_1 = 0, \\ P_2 x + Q_2 y + R_2 z + S_2 = 0, \end{cases}$$

où S_1, S_2 sont des fonctions données de a.

L'équation générale des cylindres dont les génératrices sont parallèles à la même direction est donc de la forme

$$(1) \qquad F(P_1 x + Q_1 y + R_1 z, \; P_2 x + Q_2 y + R_2 z) = 0,$$

où F est une composante à deux variables, dont la nature dépend de celles des deux fonctions $S_1(a)$, $S_2(a)$ réglant le mouvement de la génératrice. Réciproquement, toute équation de cette sorte représente évidemment un cylindre ayant ses génératrices parallèles à la direction (p, q, r).

145. Le premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation (1), c'est-à-dire la fonction la plus générale qu'il faut égaler à zéro pour avoir l'équation d'un pareil cylindre, satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles qu'il est facile d'obtenir. Car, en appelant u, v, pour un instant, les fonctions simples linéaires dont le premier membre est fonction composée, il vient immédiatement

$$\frac{df}{dx} = P_1 \frac{\partial F}{\partial u} + P_2 \frac{\partial F}{\partial v},$$
$$\frac{df}{dy} = Q_1 \frac{\partial F}{\partial u} + Q_2 \frac{\partial F}{\partial v},$$
$$\frac{df}{dz} = R_1 \frac{\partial F}{\partial u} + R_2 \frac{\partial F}{\partial v},$$

d'où, en multipliant par p, q, r et ajoutant membre à membre,

$$(2) \qquad p \frac{df}{dx} + q \frac{df}{dy} + r \frac{df}{dz} = 0.$$

Cette équation exprime évidemment (72) qu'*au point quel-*

conque (x, y, z), *le plan tangent au cylindre est parallèle à la direction invariable de toutes ses génératrices.*

Son intégrale générale peut être calculée par la méthode de Jacobi (71***), et reproduit l'équation (1). Effectivement, les équations différentielles totales auxiliaires qui peuvent ici être écrites

$$\frac{df}{dx} = 0, \qquad \frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r},$$

ou bien évidemment encore

$$\frac{df}{dx} = 0, \qquad P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz = 0, \qquad P_2\,dx + Q_2\,dy + R_2\,dz = 0,$$

conduisent immédiatement par intégration à

$$f = C, \qquad P_1 x + Q_1 y + R_1 z = C_1, \qquad P_2 x + Q_2 y + R_2 z = C_2,$$

d'où l'équation intégrale générale

$$\Omega(f, P_1 x + \ldots, P_2 x + \ldots) = 0,$$

dont la résolution fournit bien pour f quelque fonction composée des trinômes linéaires $P_1 x + \ldots$, $P_2 x + \ldots$.

En supposant $\frac{df}{dz} \neq 0$ et, par suite, z fonction olotrope de x, y, cette coordonnée satisfait évidemment à l'équation de même nature, mais non homogène,

$$(3) \qquad p\frac{dz}{dx} + q\frac{dz}{dy} - r = 0,$$

qu'on déduit de l'équation (2), en la divisant par $-\frac{df}{dz}$, puis substituant $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ à $\frac{df}{dx} : -\frac{df}{dz}$ et $\frac{df}{dy} : -\frac{df}{dz}$.

146. Un *cône* est une surface dont la génératrice est une droite passant sans cesse par un point fixe nommé son *sommet;* d'où cette propriété : *un cône coïncide avec toute surface lui étant homothétique par rapport à son sommet.*

Le plan est la plus simple variété du cône.

Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du sommet et

$$P_1, \quad Q_1, \quad R_1,$$
$$P_2, \quad Q_2, \quad R_2$$

six fonctions données du paramètre a, dont les déterminants p, q, r ne sont pas tous identiquement nuls, les équations générales de la génératrice sont de la forme

$$(4)\quad \begin{cases} P_1(x-x_0)+Q_1(y-y_0)+R_1(z-z_0)=0, \\ P_2(x-x_0)+Q_2(y-y_0)+R_2(z-z_0)=0, \end{cases}$$

qu'on peut encore écrire

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}.$$

L'élimination, entre ces deux équations, du paramètre a, y entrant par les fonctions p, q, r, donne pour l'équation générale des cônes de sommet donné (x_0, y_0, z_0)

$$(5)\quad F\left(\frac{y-y_0}{z-z_0}, \frac{z-z_0}{x-x_0}\right)=0.$$

147. On remarquera que, *sur tout cône indécomposable en des plans, le sommet est nécessairement un point singulier.* Car, s'il est possible de substituer à l'équation (5) une autre dont le premier membre soit olotrope en x_0, y_0, z_0, savoir

$$G(x, y, z)=g_0+g_1(x-x_0, y-y_0, z-z_0) + g_2(x-x_0, y-y_0, z-z_0)+\ldots=0,$$

où g_0, g_1, g_2, ... représentent des polynômes homogènes en $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$, de degrés 0, 1, 2, ..., les équations (4) qui restent satisfaites après la multiplication simultanée de $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$ par un facteur absolument indéterminé λ, montrent que l'équation du cône serait aussi bien

$$g_0+\lambda g_1+\lambda^2 g_2+\ldots=0,$$

et, par suite,

$$(6)\quad g_\mu(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0,$$

g_μ représentant le premier de ces polynômes homogènes qui n'est pas identiquement nul. Or, sauf le cas où il est entièrement résoluble en facteurs linéaires, le premier membre de l'équation (6) admet un diviseur premier $g(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ dont les dérivées $\frac{dg}{dx}$, $\frac{dg}{dy}$, $\frac{dg}{dz}$ s'évanouissent certainement pour $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ (2).

148. Le premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation (5), c'est-à-dire la fonction la plus générale qu'il suffit d'égaler à zéro pour former l'équation de quelque cône de sommet (x_0, y_0, z_0), satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles qu'il est facile d'obtenir. Comme $\frac{x-x_0}{y-y_0} = 1 : \left(\frac{y-y_0}{z-z_0}\frac{z-z_0}{x-x_0}\right)$ est une fonction composée des deux rapports mis en évidence dans l'équation (5), nous pourrons écrire, pour plus de symétrie,

$$(7)\quad f(x, y, z) = F\left(\frac{y-y_0}{z-z_0}, \frac{z-z_0}{x-x_0}\right) = F_1\left(\frac{y-y_0}{z-z_0}, \frac{z-z_0}{x-x_0}, \frac{x-x_0}{y-y_0}\right),$$

d'où, en différentiant, et représentant par u, v, w les trois rapports engagés dans F_1,

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \qquad\qquad\qquad - \frac{z-z_0}{(x-x_0)^2}\frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{1}{y-y_0}\frac{\partial F_1}{\partial w},\\
\frac{df}{dy} &= \frac{1}{z-z_0}\frac{\partial F_1}{\partial u} \qquad\qquad\qquad - \frac{x-x_0}{(y-y_0)^2}\frac{\partial F_1}{\partial w},\\
\frac{df}{dz} &= -\frac{y-y_0}{(z-z_0)^2}\frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{1}{x-x_0}\frac{\partial F_1}{\partial v},
\end{aligned}$$

puis, en ajoutant membre à membre, après avoir multiplié par $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$,

$$(8)\qquad (x-x_0)\frac{df}{dx} + (y-y_0)\frac{df}{dy} + (z-z_0)\frac{df}{dz} = 0.$$

Cette équation exprime qu'*au point quelconque* (x, y, z), *le plan tangent au cône passe par son sommet.*

La méthode de Jacobi, encore applicable, donne ici les équations auxiliaires

$$\frac{df}{dx} = 0, \qquad \frac{dx}{x-x_0} = \frac{dy}{y-y_0} = \frac{dz}{z-z_0},$$

dont les deux dernières peuvent être écrites

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{z-z_0}{x-x_0}\right) = 0,$$

et dont l'intégration donne

$$f = C, \qquad \frac{y-y_0}{z-z_0} = C_1, \qquad \frac{z-z_0}{x-x_0} = C_2.$$

L'équation intégrale générale de l'équation (8) a donc la forme

$$\Omega\left(f, \frac{y-y_0}{z-z_0}, \frac{z-z_0}{x-x_0}\right)=0,$$

dont la résolution fournit encore pour f le premier membre de l'équation générale (7) des cônes en question.

Pour z, considérée comme fonction de x, y, l'équation (8) donne l'équation différentielle de même forme mais non homogène,

$$(9) \qquad (x-x_0)\frac{dz}{dx}+(y-y_0)\frac{dz}{dy}-(z-z_0)=0.$$

149. La rectification de la section droite d'un cylindre suffit pour obtenir immédiatement l'aire d'une plaque limitée par deux génératrices et par les traces, sur le cylindre, de deux autres surfaces quelconques pouvant se superposer par une translation parallèle aux génératrices, en particulier par deux plans parallèles; et de même pour le volume que limitent deux surfaces de ce genre et des onglets jointifs de plusieurs cylindres à génératrices toutes parallèles, dès qu'on a pu mesurer l'aire découpée par cette enveloppe cylindrique sur le plan d'une section droite.

La rectification d'une ligne sphérique, trajectoire orthogonale des génératrices d'un cône (129, IV), ramène à une intégration simple le calcul de l'aire d'une plaque limitée par deux génératrices et par les traces sur le cône de deux surfaces quelconques homothétiques par rapport à son sommet. La connaissance de l'aire découpée, par des onglets jointifs de plusieurs cônes ayant le même sommet, sur un plan donné ou bien sur une sphère ayant son centre en ce sommet, suffit à l'évaluation immédiate du volume limité par cet assemblage d'onglets et par les plaques qu'il enlève sur deux plans quelconques ou sur deux sphères homothétiques au plan ou à la sphère donnés par rapport au sommet des cônes. Mais ce sont des faits connus dès les Éléments, ou de trop peu d'importance pour que nous puissions nous y arrêter.

Autres surfaces développables.

150. A cause de la propriété si remarquable que nous leur reconnaîtrons bientôt (160, *inf.*), on dit *développable* toute

surface pouvant être considérée comme l'enveloppe (107) d'un plan mobile à un seul paramètre a,

$$(1) \qquad \mathfrak{p}(a)x + \mathfrak{q}(a)y + \mathfrak{r}(a)z + \mathfrak{s}(a) = 0.$$

L'équation générale de ces surfaces est donc de nature à pouvoir résulter de l'élimination de a entre une équation de cette forme et celle qu'on en déduit en la différentiant une fois par rapport à a,

$$(2) \qquad \mathfrak{p}'(a)x + \mathfrak{q}'(a)y + \mathfrak{r}'(a)z + \mathfrak{s}'(a) = 0 \qquad (\textit{loc. cit.}).$$

Les propositions générales du numéro cité et des suivants donnent immédiatement les premières propriétés des surfaces développables.

I. *Chacune d'elles est réglée* (14); car elle est engendrée par la caractéristique de son enveloppée (108), laquelle est une droite au seul paramètre a, puisqu'elle est représentée par les équations (1), (2) qui sont celles de deux plans au même paramètre.

Cette caractéristique rectiligne se nomme simplement la *génératrice* de la surface.

II. *Le plan tangent en un point l'est aussi en tout autre appartenant à la génératrice qui passe par celui-ci;* car, y ayant un contact du premier ordre avec la surface enveloppe, il en a un semblable avec la surface enveloppée (1) (107), et par suite coïncide avec elle puisque celle-ci est plane (76). Or ce plan enveloppé est circonscrit à la surface suivant la génératrice correspondante (108).

III. *Les génératrices enveloppent en général une certaine ligne;* c'est l'*arête de rebroussement* de la surface (109), ayant pour équations

$$(2\ \textit{bis}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{p}(a)x + \mathfrak{q}(a)y + \mathfrak{r}(a)z + \mathfrak{s}(a) = 0, \\ \mathfrak{p}'(a)x + \mathfrak{q}'(a)y + \mathfrak{r}'(a)z + \mathfrak{s}'(a) = 0, \\ \mathfrak{p}''(a)x + \mathfrak{q}''(a)y + \mathfrak{r}''(a)z + \mathfrak{s}''(a) = 0. \end{cases}$$

L'arête disparaît néanmoins dans les deux cas suivants.

1° *Quand ces équations linéaires en x, y, z ne forment pas un système possible et déterminé, c'est-à-dire quand on a, quel*

que soit a,

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{p} & \mathfrak{q} & \mathfrak{r} \\ \mathfrak{p}' & \mathfrak{q}' & \mathfrak{r}' \\ \mathfrak{p}'' & \mathfrak{q}'' & \mathfrak{r}'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si les déterminants des éléments des deux premières lignes de ce tableau étaient tous identiquement nuls, les fonctions $\mathfrak{p}(a)$, $\mathfrak{q}(a)$, $\mathfrak{r}(a)$ seraient proportionnelles à trois constantes (51***), le plan (1) resterait parallèle à un plan fixe, et, par suite, n'envelopperait aucune surface.

Il faut donc supposer l'un d'eux, au moins, $\neq 0$, moyennant quoi (*loc. cit.*) il existe certainement trois constantes p, q, r donnant l'identité

$$p\mathfrak{p}(a) + q\mathfrak{q}(a) + r\mathfrak{r}(a) = 0,$$

et aussi

$$p\mathfrak{p}'(a) + q\mathfrak{q}'(a) + r\mathfrak{r}'(a) = 0.$$

Le plan enveloppé (1), la génératrice avec lui, restent sans cesse parallèles à la direction fixe (p, q, r), et *la surface est un cylindre* (144) (sauf le cas où la génératrice resterait immobile en une position fixe par laquelle passerait sans cesse le plan enveloppé).

2° *Quand les valeurs de x, y, z tirées des équations* (2 *bis*) *se réduisent à des constantes x_0, y_0, z_0*. Alors on a, quel que soit a,

$$\mathfrak{p}(a)x_0 + \mathfrak{q}(a)y_0 + \mathfrak{r}(a)z_0 + \mathfrak{s}(a) = 0,$$
$$\mathfrak{p}'(a)x_0 + \mathfrak{q}'(a)y_0 + \mathfrak{r}'(a)z_0 + \mathfrak{s}'(a) = 0,$$

et le plan (1), la génératrice avec lui, passent sans cesse par le point fixe (x_0, y_0, z_0); *la surface est un cône* (146) [sauf encore l'exception mentionnée ci-dessus (1°, *in fine*)].

Ainsi donc, *en exceptant les cônes et les cylindres, toute surface développable est engendrée par le mouvement de la tangente à quelque ligne* [nécessairement gauche (17)].

Le point de contact décompose la génératrice en deux demi-droites mobiles qui, suivies chacune par cheminement (*Cf.* 84, *in fine*), engendrent *deux nappes* de la surface, que l'arête sépare, et qui, en s'y raccordant, la reproduisent tout entière.

IV. *La plus courte distance de deux génératrices infini-*

ment voisines est infiniment petite du troisième ordre au moins, par rapport à la variation correspondante du paramètre (99).

V. *Tout plan tangent à une surface développable a un contact du second ordre au moins avec l'arête de rebroussement, au point de contact de celle-ci avec la génératrice correspondante, ou, en d'autres termes, se confond avec le plan osculateur de cette ligne* (110), (89).

Naturellement, ces deux dernières propositions ne s'appliquent ni aux cônes, ni aux cylindres.

131. Une coordonnée du point courant d'une surface développable, considérée comme fonction des deux autres, satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre, qui est indépendante de la forme particulière de la surface et de sa position dans l'espace; on l'obtient comme il suit.

En supposant z fonction olotrope de x, y, ainsi que a en vertu du système (1), (2), la différentiation de la première équation par rapport à x donne

$$p(a) + r(a)\frac{dz}{dx} + [p'(a)x + q'(a)y + r'(a)z + s'(a)]\frac{da}{dx} = 0,$$

et plus simplement, en ayant égard à la seconde,

$$(3) \qquad p(a) + r(a)\frac{dz}{dx} = 0.$$

La différentiation par rapport à y donne semblablement

$$(4) \qquad q(a) + r(a)\frac{dz}{dy} = 0,$$

et l'élimination de a entre les équations (3), (4), montre que l'une des dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ est une fonction composée finie de l'autre; leur déterminant différentiel s'évanouit donc identiquement (314*), d'où l'équation cherchée

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}\frac{dz}{dx}, & \frac{d}{dy}\frac{dz}{dx} \\ \frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}, & \frac{d}{dy}\frac{dz}{dy} \end{vmatrix} = \frac{d^2 z}{dx^2}\frac{d^2 z}{dy^2} - \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)^2 = 0.$$

Elle exprime qu'*en chaque point d'une pareille surface, les droites osculatrices* (79) *se confondent* (*Cf.* 204, III, *inf.*). Effectivement, la résolution par rapport à z de l'équation de la surface (premier mode) permet de l'écrire

$$f(x, y, z) = \mathrm{F}(x, y) - z = 0,$$

moyennant quoi les équations (5) du n° 79 se réduisent à

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\beta - \gamma = 0,\\ &\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{dx\,dy}\alpha\beta + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2}\beta^2 = 0,\end{aligned}\right.$$

et la condition de coïncidence des droites osculatrices devient précisément l'équation (5) ci-dessus, quand on y substitue comme de raison $\frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots$ à $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}, \ldots$.

Gauss a découvert à la même équation (5) une autre représentation géométrique des plus remarquables, dont nous parlerons incessamment (158, *inf.*).

152. *Réciproquement, toute surface dont une coordonnée z du point courant satisfait à l'équation* (5) *est développable.*

En vertu de cette équation, l'une des dérivées $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ est certainement quelque fonction composée de l'autre (314*), ou bien, ce qui revient au même, on a

$$(6) \qquad \frac{dz}{dx} = \varpi(\mathfrak{a}), \qquad \frac{dz}{dy} = \varkappa(\mathfrak{a}),$$

$\mathfrak{a}$ représentant une certaine fonction simple de x, y, et ϖ, $\varkappa$ certaines composantes arbitraires à une seule variable.

Il faut maintenant intégrer les équations différentielles totales (6), chercher d'abord la forme que doit avoir $\mathfrak{a}$ pour qu'elles soient intégrables. Comme les seconds membres ne contiennent pas la principale fonction inconnue z, il faut et il suffit (208*) que soit remplie la condition d'intégrabilité

$$(6\ bis) \qquad \varpi'(\mathfrak{a})\frac{d\mathfrak{a}}{dy} - \varkappa'(\mathfrak{a})\frac{d\mathfrak{a}}{dx} = 0,$$

dont dépend ainsi la fonction simple inconnue $\mathfrak{a}$. C'est une équa-

tion linéaire aux dérivées partielles, intégrable par la méthode de Jacobi (71***). Les deux équations auxiliaires sont ici

$$\frac{dx}{-\varkappa'(\alpha)} = \frac{dy}{\varpi'(\alpha)} = \frac{d\alpha}{0},$$

dont l'intégrale évidente

$$\alpha = C$$

permet de remplacer la première par

$$\frac{dx}{-\varkappa'(C)} = \frac{dy}{\varpi'(C)},$$

donnant par intégration

$$\varpi'(C)x + \varkappa'(C)y = C_1,$$

ou bien encore, par sa combinaison avec la première intégrale,

$$\varpi'(\alpha)x + \varkappa'(\alpha)y = C_1.$$

L'intégrale générale de l'équation (6 *bis*) est donc

$$\Omega[\alpha,\ \varpi'(\alpha)x + \varkappa'(\alpha)y] = 0,$$

où Ω est une composante arbitraire, équivalant à

$$(7) \qquad \varpi'(\alpha)x + \varkappa'(\alpha)y + \sigma'(\alpha) = 0,$$

σ' désignant une nouvelle composante arbitraire qu'il nous est avantageux d'écrire comme une dérivée (215*).

On obtiendrait donc z en choisissant arbitrairement les composantes ϖ, $\varkappa$, σ, et intégrant les équations (6), après y avoir substitué à α son expression en x, y tirée de (7). Mais, comme en vertu de celle-ci les équations (6) peuvent s'écrire encore

$$\frac{dz}{dx} = \varpi(\alpha) + [\varpi'(\alpha)x + \varkappa'(\alpha)y + \sigma'(\alpha)]\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d}{dx}[\varpi(\alpha)x + \varkappa(\alpha)y + \sigma(\alpha)],$$

$$\frac{dz}{dy} = \varkappa(\alpha) + [\varpi'(\alpha)x + \varkappa'(\alpha)y + \sigma'(\alpha)]\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d}{dy}[\varpi(\alpha)x + \varkappa(\alpha)y + \sigma(\alpha)],$$

elles ont pour intégrale générale évidente

$$(8) \qquad \varpi(\alpha)x + \varkappa(\alpha)y - z + \sigma(\alpha) = 0,$$

où la constante arbitraire est comprise dans $\sigma(\alpha)$.

L'équation générale des surfaces caractérisées par l'équation différentielle (5) s'obtient donc par la simple élimination de α

entre les équations (7) et (8), ne différant évidemment de (1) et (2) que par la forme.

153. *Les cylindres et les cônes sont tous des surfaces développables.* On retombe en effet sur l'équation aux dérivées partielles (5) qui caractérise exactement ces surfaces, comme nous venons de le constater, en différentiant l'équation générale des cylindres, cotée (3) au n° 145, d'abord par rapport à x, ensuite par rapport à y, puis en éliminant p, q entre les résultats, et, aussi bien, en exécutant sur l'équation générale des cônes cotée (9) au n° 148 les mêmes différentiations suivies de l'élimination de x_0, y_0.

154. La démonstration de la propriété caractéristique à laquelle les surfaces développables doivent leur nom (160, *inf.*) exige quelques préliminaires.

Sur deux surfaces données par leurs représentations du troisième mode réalisées en coordonnées rectangulaires au moyen des *mêmes* variables auxiliaires p, q,

$$(9) \qquad 'x = '\varphi(p, q), \qquad 'y = '\chi(p, q), \qquad 'z = '\psi(p, q),$$

$$(10) \qquad ''x = ''\varphi(p, q), \qquad ''y = ''\chi(p, q), \qquad ''z = ''\psi(p, q),$$

on nomme *points correspondants* ceux fournis par l'attribution à p, q d'une même paire de valeurs particulières, *lignes correspondantes* celles que donne la substitution à p, q d'un même couple, $\varpi(t)$, $\varkappa(t)$, de fonctions d'une même troisième variable auxiliaire t, *plaques correspondantes* celles limitées par des assemblages d'arcs correspondants de lignes correspondantes, etc.

Quand, sur les surfaces (9), (10), *deux arcs correspondants, $'s$, $''s$, sont toujours égaux en longueur, on a, quelles que soient* p, q,

$$(11) \quad 'E(p, q) = ''E(p, q), \qquad 'F(p, q) = ''F(p, q), \qquad 'G(p, q) = ''G(p, q),$$

$'E, \ldots, ''E, \ldots$ *désignant, pour l'une et l'autre surfaces, les fonctions* E, F, G *définies au n°* 22, *et réciproquement.*

En outre, les aires de deux plaques correspondantes sont toujours égales, ainsi que les angles sous lesquels deux paires

de lignes correspondantes se coupent sur l'une et l'autre surfaces (131).

I. L'égalité supposée $'s = ''s$ entraîne $\frac{d's}{dt} = \frac{d''s}{dt}$, puis (22)

$$'E\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + 2'F\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} + 'G\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = ''E\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + 2''F\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} + ''G\left(\frac{dq}{dt}\right)^2,$$

quelle que soit t, quelles que soient aussi les fonctions de t substituées à p, q. Or cette identité, entre deux fonctions composées différentielles des mêmes fonctions simples indéterminées $p = \varpi(t)$, $q = \varkappa(t)$, ne saurait subsister sans l'identité des composantes (263*), d'où les relations (11).

La réciproque est évidente.

II. En combinant, avec les relations (11) supposées existantes, l'identité (13) du n° 22, on trouve immédiatement

$$'l^2 + 'm^2 + 'n^2 = ''l^2 + ''m^2 + ''n^2,$$

quelles que soient p, q. De quoi, et de la formule (6) du n° 35, résulte immédiatement l'égalité numérique des aires de plaques correspondantes.

III. Si, sur la surface (8) du n° 22, on trace deux lignes à partir d'un même point, en faisant d'abord $p = \varpi_1(t)$, $q = \varkappa_1(t)$, en prenant ensuite $p = \varpi_2(t)$, $q = \varkappa_2(t)$, et si l'on applique les formules (10) du même numéro à la construction des expressions (5) du numéro 84, on trouvera facilement pour le cosinus de l'angle V formé par les tangentes à ces lignes, considérées dans les directions où t croît,

$$\cos V = \frac{E\varpi_1'(t)\varpi_2'(t) + F[\varpi_1'(t)\varkappa_2'(t) + \varkappa_1'(t)\varpi_2'(t)] + G\varkappa_1'(t)\varkappa_2'(t)}{\sqrt{E\varpi_1'(t)^2 + 2F\varpi_1'(t)\varkappa_1'(t) + G\varkappa_1'(t)^2}\sqrt{E\varpi_2'(t)^2 + 2F\varpi_2'(t)\varkappa_2'(t) + G\varkappa_2'(t)^2}},$$

relation d'où résulte l'exactitude de ce qu'il nous restait à prouver.

155. *A toute ligne géodésique* (29) *de l'une des surfaces* (9), (10), *correspond sur l'autre, une ligne géodésique aussi.* On le constaterait facilement en raisonnant comme ci-dessus, après avoir écrit les équations de ces lignes dans le troisième mode, si déjà la chose n'était pour nous à peu près évidente. Effectivement,

la seconde ligne doit remplir les conditions du minimum, puisque ses arcs ont mêmes longueurs que leurs correspondants sur la première, pour lesquels les conditions dont il s'agit sont satisfaites.

156. En vertu du théorème du n° 154, il est évident que si, sur deux surfaces pour lesquelles il a lieu, on découpe deux plaques correspondantes quelconques, et si on les réalise matériellement en employant pour l'une une matière rigide, pour l'autre une matière inextensible mais néanmoins flexible, telle que de la baudruche, on pourra, sans plisser ni déchirer la seconde, la transporter, en la déformant, de manière à faire coïncider tous ses points avec leurs correspondants sur la première; *on pourra, en un mot, appliquer la seconde plaque sur la première, sans plissage ni duplicature*. C'est pourquoi on dit que deux pareilles surfaces sont *applicables* (l'une sur l'autre).

Deux plaques correspondantes sont susceptibles d'application mutuelle proprement dite, quand elles sont suffisamment petites; mais, quand il en est autrement pour la plaque flexible, il est bon d'observer que son application sur l'autre surface peut exiger sa *duplication, triplication, ...* partielle sur elle-même. Effectivement, il peut fort bien se faire que deux, trois, ... couples de valeurs de p, q, donnant des points tous différents sur la surface flexible, n'en donnent au contraire qu'un seul et même sur la surface rigide. C'est, en particulier, ce qui arrive toujours quand les fonctions φ, χ, ψ sont toutes périodiques pour la surface rigide, sans l'être pour la surface flexible.

157. Quand l'application de deux surfaces est possible, et que le fait a été une fois rendu apparent par un choix convenable de variables auxiliaires communes p, q, il est évident qu'il reste tel, après la substitution à p, q, faite simultanément pour les deux surfaces, de deux fonctions quelconques de nouvelles variables $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$.

En conséquence, pour reconnaître si deux surfaces, données par les expressions de leurs coordonnées (rectangulaires) au moyen des deux variables auxiliaires p, q pour la première, et de deux autres quelconques $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ pour la seconde, sont applicables, ou non, il suffit de chercher s'il existe, ou non, deux fonctions $\mathfrak{P}(p, q)$,

$\mathfrak{Q}(p, q)$ dont la substitution à $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, dans les équations de la deuxième surface, transforme ses fonctions E, F, G en des fonctions composées de p, q, identiquement égales aux trois fonctions analogues pour la première. *L'application n'est donc pas possible en général,* puisque ainsi on dispose de deux fonctions seulement pour faire face à trois conditions.

D'après cela encore, *deux surfaces respectivement applicables à une même troisième le sont certainement l'une à l'autre.*

158. On doit à Gauss une propriété capitale des surfaces mutuellement applicables, que nous aurons à utiliser.

En conservant les notations du n° 22, et posant

$$(12) \qquad +\sqrt{\ell^2 + \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2} = \partial = +\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2},$$

$$(13) \qquad \mathfrak{x} = \frac{\ell}{\partial}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{\mathrm{m}}{\partial}, \qquad \mathfrak{z} = \frac{\mathrm{n}}{\partial},$$

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{d\mathfrak{y}}{dp} & \dfrac{d\mathfrak{y}}{dq} \\ \dfrac{d\mathfrak{z}}{dp} & \dfrac{d\mathfrak{z}}{dq} \end{vmatrix} = \mathfrak{l}, \qquad |\ldots| = \mathfrak{m}, \qquad |\ldots| = \mathfrak{n},$$

$$(14\ bis) \qquad +\sqrt{\mathfrak{l}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{n}^2} = \mathfrak{d},$$

les quantités (13) sont des fonctions de p, q fournissant les cosinus caractéristiques d'une direction déterminée de la normale à la surface (8) du numéro cité (118, *in fine*); elles sont aussi bien, à cause de

$$(15) \qquad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 1,$$

les coordonnées du point qu'une demi-droite issue de l'origine dans cette même direction trace sur la sphère de rayon $= 1$, ayant cette origine pour centre, point qui *correspond* (154) au pied de la normale considérée, et que nous nommerons son *image sphérique.* Et, en combinant entre eux, ainsi qu'avec les formules (14), (13), (12), (14 *bis*), les résultats

$$\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{x}}{dp} + \ldots = 0, \qquad \mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{x}}{dq} + \ldots = 0$$

de la différentiation de l'équation (15) par rapport à p, q, on

obtient les relations

$$(16) \qquad \frac{\mathfrak{l}}{l} = \frac{\mathfrak{m}}{m} = \frac{\mathfrak{n}}{n} = \pm\frac{\mathfrak{d}}{\partial},$$

montrant de nouveau qu'aux points correspondants de la sphère et de la surface leurs normales sont parallèles. En outre, la valeur absolue du dernier membre de ces égalités représente la limite du rapport, à l'aire d'une plaque de la surface ayant tous ses points infiniment voisins de (x, y, z), de celle de son image sphérique; car, en appelant a une aire plane découpée arbitrairement dans le plan des axes rectangulaires auxiliaires employés à la notation graphique des variables p, q (35) des plaques correspondantes sur la surface et sur la sphère ont pour expression (*loc. cit.*) les intégrales doubles

$$\int\int \partial\, dp\, dq, \qquad \int\int \mathfrak{d}\, dp\, dq,$$

prises dans l'aire a, et, quand les distances des points de cette aire a au point fixe du plan auxiliaire auquel répondent les points (x, y, z), $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, sont inférieures à quelque quantité infiniment petite, les rapports de ces intégrales à la même aire tendent respectivement vers ∂ et $\mathfrak{d}$ (107^{***}).

Cela posé, Gauss a étendu aux surfaces la notion de *courbure*, acquise avant lui pour les lignes (184, *inf.*), en appelant *courbure totale* d'une plaque de surface (en valeur absolue), l'aire de son image sphérique, et *courbure totale* de la surface *au point* (x, y, z) cette limite $\pm|\mathfrak{d} : \partial|$ vers laquelle tend ainsi le rapport des aires des deux plaques, *limite pourvue toutefois* (quand elle ne s'évanouit pas) *du signe commun aux trois premiers rapports égaux de la suite* (16), c'est-à-dire la fonction déterminée $k(p, q)$ de p, q, que constitue la valeur commune de ces rapports.

Sur une sphère de rayon quelconque R, par exemple, il est évident que la courbure totale est constante et $= +\frac{1}{R^2}$.

158 *bis*. Aux signes opposés dont la courbure totale k est susceptible quand elle n'est pas nulle, correspondent, pour la surface et dans le voisinage du point considéré, deux formes bien différentes dont nous ne devons pas omettre la mention. En nommant α, β, γ les paramètres d'une direction déterminée quelconque de l'espace, non parallèle, toutefois, à celle commune

des plans tangents à la surface et à la sphère, et, en ajoutant terme à terme les rapports égaux (16) multipliés en haut et en bas par α, β, γ respectivement, on obtient le rapport égal des deux déterminants non nuls

$$\begin{vmatrix} \alpha & \dots & \dots \\ \dfrac{d\mathfrak{x}}{dp} & \dots & \dots \\ \dfrac{d\mathfrak{x}}{dq} & \dots & \dots \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \dots & \dots \\ \dfrac{dx}{dp} & \dots & \dots \\ \dfrac{dx}{dq} & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

dont le signe est évidemment identique au signe final du rapport

$$(16\ bis) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \mathfrak{x}_p - \mathfrak{x} & \mathfrak{y}_p - \mathfrak{y} & \mathfrak{z}_p - \mathfrak{z} \\ \mathfrak{x}_q - \mathfrak{x} & \mathfrak{y}_q - \mathfrak{y} & \mathfrak{z}_q - \mathfrak{z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha & \dots \\ x_p - x & \dots \\ x_q - x & \dots \end{vmatrix},$$

où (x_p, y_p, z_p), (x_q, y_q, z_q) sont des points de la surface, infiniment voisins de (x, y, z) sur les lignes qu'y décrit ce dernier quand on donne d'abord à p un accroissement infiniment petit en laissant q invariable, ensuite à q un pareil accroissement, p demeurant constant à son tour, où $(\mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_p, \mathfrak{z}_p)$, $(\mathfrak{x}_q, \mathfrak{y}_q, \mathfrak{z}_q)$ sont naturellement les images sphériques des deux points ainsi définis. Si donc la courbure totale est positive, les déterminants (16 *bis*) finissent par offrir des signes identiques, et les deux trièdres dont les directions des arêtes ont pour paramètres les éléments des lignes 1, 2, 3 du premier (11), et ceux des lignes 1, 2, 3 du second, sont *isoïdes* [comme ceux constitués par les directions positives (+, +, +) des axes coordonnés et par leurs directions (+, —, —), respectivement], c'est-à-dire que, par déplacement et déformation de l'un, *n'exigeant pas que le déterminant correspondant passe par la valeur zéro, par suite que quelqu'une de ses arêtes traverse le plan des deux autres,* les arêtes en question, 1, 2, 3, pourront être amenées à coïncider en directions avec les arêtes de mêmes cotes dans le second. Dans ce cas, deux observateurs ayant leurs pieds au point (x, y, z) et en son image sphérique, leurs têtes dans la direction commune (α, β, γ) verront tourner autour d'eux, dans des sens de rotations toujours identiques, un point de la surface infiniment voisin de (x, y, z) et son image sphérique. Si la courbure totale

est négative, les déterminants (16 *bis*) finissent par offrir des signes contraires, les trièdres sont *anisoïdes* (comme celui des parties positives des axes, et l'autre que forment, dans le même ordre de succession, les parties positives de deux d'entre eux et la partie négative du troisième), c'est-à-dire que l'adduction de l'un à l'autre exigera la traversée du plan de deux de ses arêtes par la troisième, et les rotations expliquées tout à l'heure seront toujours vues de sens contraires. Quand la courbure totale est nulle, le premier des déterminants (16 *bis*) n'a pas un signe final déterminé, et rien ne subsiste de cette distinction.

L'allure propre à la courbure totale positive s'observe en tous les points d'une sphère évidemment, en tous ceux aussi des surfaces, où nous les voyons nettement convexes vers une région de l'espace, concaves vers l'autre, comme toutes les surfaces du deuxième degré non réglées, et la jante d'un tore. L'autre allure s'observe dans les régions des surfaces, courbées comme les selles des chevaux, par exemple, sur toutes les surfaces du deuxième degré à génératrices rectilignes réelles et distinctes, sur le moyeu d'un tore annulaire. La courbure totale est nulle sur tout le plan, sur tous les cylindres et les cônes, et encore, par exemple, sur les parallèles d'un tore y séparant les régions nommées tout à l'heure sa jante et son moyeu.

159. Voici maintenant le théorème de Gauss :

Quand deux surfaces sont mutuellement applicables, leurs courbures totales sont identiquement égales.

I. *La courbure totale* $k(p, q)$ *de la surface considérée tout à l'heure s'exprime, en fonction composée différentielle des trois fonctions simples* E, F, G *seulement, par la formule*

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} 4(EG - F^2)^2 k = {} & E\left[\left(\frac{dG}{dp}\right)^2 - 2\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dq} + \frac{dE}{dq}\frac{dG}{dq}\right] \\ & + F\left[\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dq} - \frac{dG}{dp}\frac{dE}{dq} \right. \\ & \qquad \left. - 2\left(\frac{dF}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} + \frac{dE}{dq}\frac{dF}{dq}\right)\right] \\ & + G\left[\frac{dE}{dp}\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right] \\ & - 2(EG - F^2)\left[\frac{d^2G}{dp^2} - 2\frac{d^2F}{dp\,dq} + \frac{d^2E}{dq^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

L'addition terme à terme des rapports égaux (16), compliqués en bas et en haut par les multiplicateurs $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, respectivement, puis la prise en considération de la relation (12), donnent immédiatement

$$(18)\quad k = \frac{\mathfrak{l}\mathfrak{L} + \mathfrak{m}\mathfrak{M} + \mathfrak{n}\mathfrak{N}}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2}\begin{vmatrix} \frac{dx}{dp}\frac{d\mathfrak{x}}{dp} + \frac{dy}{dp}\frac{d\mathfrak{y}}{dp} + \frac{dz}{dp}\frac{d\mathfrak{z}}{dp}, & \frac{dx}{dp}\frac{d\mathfrak{x}}{dq} + \dots \\ \frac{dx}{dq}\frac{d\mathfrak{x}}{dp} + \dots\dots\dots\dots, & \frac{dx}{dq}\frac{d\mathfrak{x}}{dq} + \dots \end{vmatrix},$$

en utilisant une transformation bien connue d'une somme de produits de déterminants d'ordre 2. Mais on a évidemment

$$\frac{dx}{dp}\frac{d\mathfrak{x}}{dp} + \dots = \frac{d}{dp}\left(\mathfrak{x}\frac{dx}{dp} + \dots\right) - \left(\mathfrak{x}\frac{d^2x}{dp^2} + \mathfrak{y}\frac{d^2y}{dp^2} + \mathfrak{z}\frac{d^2z}{dp^2}\right)$$
$$= -\left(\mathfrak{x}\frac{d^2x}{dp^2} + \dots\right) = -\frac{1}{\delta}\left(\frac{d^2x}{dp^2}\mathfrak{l} + \dots\right),$$

à cause des formules (13) et de l'identité évidente

$$\mathfrak{x}\frac{dx}{dp} + \dots = \frac{1}{\delta}\left[\frac{dx}{dp}\mathfrak{l} + \dots\right] = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} \frac{dx}{dp} & \frac{dy}{dp} & \frac{dz}{dp} \\ \frac{dx}{dp} & \frac{dy}{dp} & \frac{dz}{dp} \\ \frac{dx}{dq} & \frac{dy}{dq} & \frac{dz}{dq} \end{vmatrix} = 0;$$

on a, en outre, des transformations analogues pour les trois autres éléments du déterminant figurant dans le dernier membre de la relation (18). L'emploi de ces quatre transformations conduit à

$$(19)\qquad k = \frac{1}{\delta^4}\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dp^2}\mathfrak{l} + \frac{d^2y}{dp^2}\mathfrak{m} + \frac{d^2z}{dp^2}\mathfrak{n} & \frac{d^2x}{dp\,dq}\mathfrak{l} + \dots \\ \frac{d^2x}{dp\,dq}\mathfrak{l} + \dots\dots\dots\dots & \frac{d^2x}{dq^2}\mathfrak{l} + \dots\dots \end{vmatrix},$$

ou bien à

$$(20)\qquad \delta^4 k = \mathrm{UW} - \mathrm{VV},$$

si, pour abréger, on pose

$$\frac{d^2x}{dp^2}\mathfrak{l} + \dots = \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dp^2} & \dots \\ \frac{dx}{dp} & \dots \\ \frac{dx}{dq} & \dots \end{vmatrix} = \mathrm{U},$$

$$\frac{d^2x}{dp\,dq}\mathfrak{l} + \dots = \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix} = \mathrm{V},\qquad \frac{d^2x}{dq^2} = \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix} = \mathrm{W}.$$

On a maintenant les six relations évidentes

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dp}\dfrac{d^2x}{dp^2}+\ldots=\dfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dp}, \qquad \dfrac{dx}{dp}\dfrac{d^2x}{dp\,dq}+\ldots=\dfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dq}, \\ \qquad\qquad \dfrac{dx}{dp}\dfrac{d^2x}{dq^2}+\ldots=\dfrac{dF}{dq}-\dfrac{1}{2}\dfrac{dG}{dp}, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

dont les trois dernières se déduisent des trois premières par la transposition simultanée de p, q et de E, G. Si, posant pour abréger

$$\frac{d^2x}{dp^2}\frac{d^2x}{dq^2}+\ldots=\Upsilon, \qquad \left(\frac{d^2x}{dp\,dq}\right)^2+\ldots=\Omega,$$

d'où

$$(22)\qquad \Upsilon-\Omega=-\frac{1}{2}\frac{d^2G}{dp^2}+\frac{d^2F}{dp\,dq}-\frac{1}{2}\frac{d^2E}{dq^2}$$

(en différentiant, par exemple, la seconde relation (21) par rapport à q, la troisième par rapport à p et soustrayant le premier résultat du dernier), on développe ensuite, conformément à la règle ordinaire, les produits UW, VV de déterminants du troisième ordre, la relation (20) donne, en vertu de (21),

$$\partial^4 k=\begin{vmatrix} \Upsilon, & \dfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dp}, & \dfrac{dF}{dp}-\dfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dq} \\ \dfrac{dF}{dq}-\dfrac{1}{2}\dfrac{dG}{dp}, & E, & F \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dG}{dq}, & F, & G \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \Omega, & \dfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dq}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{dG}{dp} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dE}{dq}, & E, & F \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dG}{dp}, & F, & G \end{vmatrix},$$

différence qui n'est évidemment pas altérée par les substitutions simultanées, à Ω, de o, à Υ, de $\Upsilon-\Omega$, ou bien du second membre de la formule (22). Or il suffit actuellement de développer ces déterminants ainsi modifiés, de substituer à ∂ le dernier membre de la formule (12), puis de multiplier tout par 4 dans cette relation, pour en déduire celle que nous voulions établir (17).

II. Le point visé est devenu évident; car, si les surfaces (9), (10) sont applicables, les équations (11) ont lieu, assurant, pour l'une et l'autre, l'identité des expressions de k tirées de la formule (17).

L'égalité constante des courbures totales de deux surfaces aux points correspondants est ainsi une condition nécessaire à leur

applicabilité ; mais on notera qu'elle n'est pas suffisante. C'est ce qui a lieu toutefois dans le cas suivant, le plus simple et le plus intéressant de ceux où l'application est possible.

160. *Pour que la surface* (9) *soit applicable sur la surface* (10) *supposée être un plan, il faut et il suffit qu'elle soit développable.*

I. Comme, pour tout plan, les expressions des coordonnées en fonction de deux variables auxiliaires peuvent être prises linéaires (7), les déterminants $''\mathfrak{l}$, $''\mathfrak{m}$, $''\mathfrak{n}$ relatifs à celui dont il s'agit (10), se réduisent à des constantes, par suite, les déterminants $''\mathfrak{L}$, $''\mathfrak{M}$, $''\mathfrak{N}$ des relations (14) à zéro, et la courbure totale $''k$ est identiquement nulle, comme les rapports (16) dont la valeur commune l'a définie. Pour l'applicabilité de la surface considérée sur le plan, il faut donc que l'on ait $'k(p, q) = 0$ identiquement aussi (159). Or, si l'on adopte pour elle le deuxième mode de représentation, en prenant

$$'x = p, \qquad 'y = q, \qquad 'z = '\psi(p, q) = \mathrm{F}('x, 'y) \qquad (5),$$

les dérivées secondes de $'x$, $'y$ s'évanouissent toutes, et en vertu des formules (7) du n° 37, de la relation (12), la formule (19) donne simplement

$$'k = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2\,'z}{d'x^2} & \dfrac{d^2\,'z}{d'x\,d'y} \\ \dfrac{d^2\,'z}{d'x\,d'y} & \dfrac{d^2\,'z}{d'y^2} \end{vmatrix} : \left[1 + \left(\frac{d'z}{d'x}\right)^2 + \left(\frac{d'z}{d'y}\right)^2\right]^2,$$

moyennant quoi, l'identité $'k(p, q) = 0$ entraîne l'équation aux dérivées partielles (5), imposant bien à la surface (9) la condition d'être développable (152).

II. Passant à la réciproque, nous profiterons de l'indétermination du choix des variables auxiliaires p, q, susceptible de rendre l'applicabilité apparente, pour mettre les équations de la surface (9), que nous supposerons désormais développable, sous une forme montrant facilement des particularités intéressantes de l'application.

Nous prendrons, pour ces équations, celles d'une génératrice

indéterminée de la surface

$$(23)\qquad 'x = '\mathfrak{x} + '\xi q,\qquad 'y = '\mathfrak{y} + '\eta q,\qquad 'z = '\mathfrak{z} + '\zeta q,$$

où q joue le rôle de la variable auxiliaire unique, nécessaire à la troisième représentation de cette droite, où $'\mathfrak{x}$, $'\mathfrak{y}$, $'\mathfrak{z}$, $'\xi$, $'\eta$, $'\zeta$ désignent six fonctions déterminées de p, savoir, les trois dernières, les cosinus directeurs de la génératrice liés ainsi par la relation

$$(24)\qquad '\xi^2 + '\eta^2 + '\zeta^2 = 1,$$

et les trois premières, les coordonnées de son point d'appui sur quelque trajectoire orthogonale déterminée $['\mathfrak{T}]$ de toutes les génératrices (129), donnant lieu, par suite, à la relation de perpendicularité

$$(25)\qquad '\xi\frac{d'\mathfrak{x}}{dp} + '\eta\frac{d'\mathfrak{y}}{dp} + '\zeta\frac{d'\mathfrak{z}}{dp} = 0.$$

On a, de plus, cette autre relation

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{d'\mathfrak{x}}{dp} & \dfrac{d'\mathfrak{y}}{dp} & \dfrac{d'\mathfrak{z}}{dp} \\ '\xi & '\eta & '\zeta \\ \dfrac{d'\xi}{dp} & \dfrac{d'\eta}{dp} & \dfrac{d'\zeta}{dp} \end{vmatrix} = 0,$$

exprimant que la même droite reste parallèle à une droite fixe, ou bien passe par un point fixe, ou bien est douée d'une enveloppe curviligne (98), (150, III).

La différentiation des équations (23) donnant

$$\frac{d'x}{dp} = \frac{d'\mathfrak{x}}{dp} + q\frac{d'\xi}{dp},\qquad \frac{d'y}{dp} = \frac{d'\mathfrak{y}}{dp} + q\frac{d'\eta}{dp},\qquad \frac{d'z}{dp} = \frac{d'\mathfrak{z}}{dp} + q\frac{d'\zeta}{dp},$$
$$\frac{d'x}{dq} = '\xi,\qquad \frac{d'y}{dq} = '\eta,\qquad \frac{d'z}{dq} = '\zeta,$$

on trouvera tout d'abord

$$'\mathrm{E} = \left[\left(\frac{d'\mathfrak{x}}{dp}\right)^2 + \ldots\right] + 2q\left[\frac{d'\mathfrak{x}}{dp}\frac{d'\xi}{dp} + \ldots\right] + q^2\left[\left(\frac{d'\xi}{dp}\right)^2 + \ldots\right],$$
$$'\mathrm{F} = \left['\xi\frac{d'\mathfrak{x}}{dp} + \ldots\right] + q\left['\xi\frac{d'\xi}{dp} + \ldots\right],$$
$$'\mathrm{G} = '\xi^2 + '\eta^2 + '\zeta^2,$$

et aussitôt $'G = 1$ à cause de (24), $'F = 0$ à cause de la même relation différentiée,

$$(27) \qquad '\xi \frac{d'\xi}{dp} + '\eta \frac{d'\eta}{dp} + '\zeta \frac{d'\zeta}{dp} = 0,$$

et de (25). Quant à $'E$, nous transformerons son expression comme il suit.

Les groupes extrêmes entre crochets sont des fonctions déterminées de p, qu'il nous sera commode de considérer comme les carrés des dérivées premières d'autres fonctions connues $'\mathfrak{s}(p)$, $'\sigma(p)$ de la même variable (215*) en posant

$$(28) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d'\mathfrak{x}}{dp}\right)^2 + \left(\dfrac{d'\mathfrak{y}}{dp}\right)^2 + \left(\dfrac{d'\mathfrak{z}}{dp}\right)^2 = \left(\dfrac{d'\mathfrak{s}}{dp}\right)^2, \\ \left(\dfrac{d'\xi}{dp}\right)^2 + \left(\dfrac{d'\eta}{dp}\right)^2 + \left(\dfrac{d'\zeta}{dp}\right)^2 = \left(\dfrac{d'\sigma}{dp}\right)^2 \end{cases}$$

($'\mathfrak{s}$ est l'arc de la trajectoire $['\mathfrak{T}]$, $'\sigma$ est celui de l'*indicatrice sphérique* (182, *inf.*) de l'arête de rebroussement quand elle existe).

Nous observerons ensuite que les déterminants du Tableau

$$(28\ bis) \qquad \begin{cases} \dfrac{d'\xi}{dp}, & \dfrac{d'\eta}{dp}, & \dfrac{d'\zeta}{dp}, \\ \dfrac{d'\mathfrak{x}}{dp}, & \dfrac{d'\mathfrak{y}}{dp}, & \dfrac{d'\mathfrak{z}}{dp}, \end{cases}$$

mineurs du déterminant (26), complémentaires à $'\xi$, $'\eta$, $'\zeta$ respectivement, s'évanouissent tous identiquement; on le prouvera, pour le premier, par exemple, en multipliant par $'\xi$ les éléments de la première colonne de ce déterminant (26), leur ajoutant ceux de mêmes rangs dans les autres colonnes, multipliés préalablement par $'\eta$, $'\zeta$, puis remarquant qu'ainsi, dans la première colonne du même déterminant (26) resté toujours nul, les éléments sont devenus les extrêmes $= 0$, en vertu de (25) et (27), le moyen $= 1$ à cause de (24). De quoi et de l'impossibilité, pour les éléments de la dernière ligne du Tableau (28 *bis*), de s'évanouir simultanément à cause de l'existence de la trajectoire $['\mathfrak{T}]$ (10), résultent, en ayant égard à (28) et supposant l'attribution de signes convenables faite à $'\mathfrak{s}$, $'\sigma$, les relations

$$(29) \qquad \frac{d'\xi}{dp} : \frac{d'\mathfrak{x}}{dp} = \frac{d'\eta}{dp} : \frac{d'\mathfrak{y}}{dp} = \frac{d'\zeta}{dp} : \frac{d'\mathfrak{z}}{dp} = \frac{d'\sigma}{dp} : \frac{d'\mathfrak{s}}{dp}$$

entraînant immédiatement, toujours à cause de (28),

$$(30)\qquad \frac{d'\mathfrak{r}}{dp}\frac{d'\xi}{dp}+\ldots=\frac{d'\mathfrak{s}}{dp}\frac{d'\sigma}{dp},$$

et définitivement, par suite,

$$(31)\qquad {}'\mathrm{E}=\left(\frac{d'\mathfrak{s}}{dp}+q\,\frac{d'\sigma}{dp}\right)^2,\qquad {}'\mathrm{F}=0,\qquad {}'\mathrm{G}=1.$$

III. Le plan sur lequel nous chercherons à appliquer la surface développable (23) aura, pris pour celui des $''x''y$, des équations de la forme

$$(32)\qquad ''x={}''\varphi(p,q),\qquad ''y={}''\chi(p,q),\qquad ''z=0,$$

où les fonctions $''\varphi$, $''\chi$ sont à déterminer, si possible, de manière à faire naître les identités (11). La prise en considération des formules (31) conduit immédiatement aux équations de condition

$$(33)\qquad \left(\frac{d''\varphi}{dp}\right)^2+\left(\frac{d''\chi}{dp}\right)^2=\left(\frac{d'\mathfrak{s}}{dp}+q\,\frac{d'\sigma}{dp}\right)^2,$$

$$(34)\qquad \frac{d''\varphi}{dp}\frac{d''\varphi}{dq}+\frac{d''\chi}{dp}\frac{d''\chi}{dq}=0,$$

$$(35)\qquad \left(\frac{d''\varphi}{dq}\right)^2+\left(\frac{d''\chi}{dq}\right)^2=1.$$

En différentiant (34) par rapport à q, puis en en retranchant le produit par $\frac{1}{2}$ du résultat de la différentiation de (35) par rapport à p, en différentiant ensuite cette même équation (35) par rapport à q, il vient

$$\frac{d''\varphi}{dp}\frac{d^2\,''\varphi}{dq^2}+\frac{d''\chi}{dp}\frac{d^2\,''\chi}{dq^2}=0,$$
$$\frac{d''\varphi}{dq}\frac{d^2\,''\varphi}{dq^2}+\frac{d''\chi}{dq}\frac{d^2\,''\chi}{dq^2}=0.$$

Et, dans ces dernières équations, le déterminant des coefficients des dérivées secondes ne peut s'évanouir identiquement; car, en retranchant du produit de (33), (35), multipliées membre à membre, le carré de (34), il vient, pour ce déterminant, l'expression $\pm\left(\frac{d'\mathfrak{s}}{dp}+q\,\frac{d'\sigma}{dp}\right)$ dont le terme indépendant de q, au moins,

ne peut s'évanouir quel que soit p (10). Elles donnent donc

$$\frac{d^2\,''\varphi}{dq^2} = \frac{d^2\,''\chi}{dq^2} = 0,$$

d'où, en intégrant deux fois par rapport à q,

(36) $$''\varphi(p, q) = ''\mathfrak{x} + ''\xi q, \qquad ''\chi(p, q) = ''\mathfrak{y} + ''\eta q,$$

$''\mathfrak{x}$, $''\mathfrak{y}$, $''\xi$, $''\eta$ représentant quatre fonctions de p seulement, à déterminer par la condition que la substitution de ces expressions (36) procure satisfaction aux équations (33), (34), (35).

L'identification des résultats de ces substitutions conduit à

(37) $$''\xi^2 + ''\eta^2 = 1$$

provenant de (35), puis à

(38) $$''\xi \frac{d''\mathfrak{x}}{dp} + ''\eta \frac{d''\mathfrak{y}}{dp} = 0$$

provenant de (34) et de (37) différentiée,

(39) $$''\xi \frac{d''\xi}{dp} + ''\eta \frac{d''\eta}{dp} = 0,$$

puis à

(40) $$\left(\frac{d''\mathfrak{x}}{dp}\right)^2 + \left(\frac{d''\mathfrak{y}}{dp}\right)^2 = \left(\frac{d'\mathfrak{s}}{dp}\right)^2,$$

(41) $$\frac{d''\mathfrak{x}}{dp}\frac{d''\xi}{dp} + \frac{d''\mathfrak{y}}{dp}\frac{d''\eta}{dp} = \frac{d'\mathfrak{s}}{dp}\frac{d'\sigma}{dp},$$

(42) $$\left(\frac{d''\xi}{dp}\right)^2 + \left(\frac{d''\eta}{dp}\right)^2 = \left(\frac{d'\sigma}{dp}\right)^2,$$

On tire de (39), (42), (37)

(43) $$\frac{d''\xi}{dp} = \pm ''\eta \frac{d'\sigma}{dp}, \qquad \frac{d''\eta}{dp} = \mp ''\xi \frac{d'\sigma}{dp},$$

puis de (38), (39), (41), (42), (43)

(44) $$\frac{d''\mathfrak{x}}{dp} = \pm ''\eta \frac{d'\mathfrak{s}}{dp}, \qquad \frac{d''\mathfrak{y}}{dp} = \mp ''\xi \frac{d'\mathfrak{s}}{dp};$$

et, pour satisfaire aux *cinq* conditions (37), (38), (40), (41), (42) (parmi lesquelles on constaterait bien facilement que la seconde est une conséquence des quatre autres), il suffit évidemment de

prendre ensemble, soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs, dans les équations (43), (44), où $''\xi$, $''\eta$, $''\mathfrak{x}$, $''\mathfrak{y}$ sont des fonctions inconnues de p, puis de les intégrer avec des valeurs initiales de $''\xi$, $''\eta$ procurant satisfaction à l'équation finie (37). Cette intégration étant évidemment possible, puisqu'il s'agit d'un système immédiat dont (37) est une équation intégrale particulière, l'application que nous avions en vue se réalise ainsi par les formules

$$(45)\qquad ''x = ''\mathfrak{x} + ''\xi q, \qquad ''y = ''\mathfrak{y} + ''\eta q, \qquad ''z = 0,$$

où $''\mathfrak{x}$, $''\mathfrak{y}$, $''\xi$, $''\eta$ représentent un quelconque des groupes d'intégrales des équations (43), (44), ci-dessus spécifiés. C'est la démonstration qui nous restait à faire.

161. Les observations suivantes la compléteront utilement.

I. Les intégrales générales du système (43), (44), pris sous sa première forme, celle que lui donnent les déterminations supérieures des signes ambigus, et dont, pour fixer les idées, nous parlerons exclusivement jusqu'à l'alinéa VIII, renferment quatre constantes arbitraires que la nécessité de satisfaire en même temps à l'équation finie (37) réduit à trois seulement, y entrant d'une manière à remarquer.

En appelant $''\xi_1$, $''\eta_1$, $''\mathfrak{x}_1$, $''\mathfrak{y}_1$ un système d'intégrales choisi à volonté, une combinaison évidente des équations (43) avec ce qu'elles deviennent après la substitution de $''\xi_1$, $''\eta_1$ à $''\xi$, $''\eta$ donne

$$\frac{d}{dp}(''\xi_1 ''\xi + ''\eta_1 ''\eta) = 0,$$

d'où, en intégrant et appelant C une certaine constante,

$$(46)\qquad ''\xi_1 ''\xi + ''\eta_1 ''\eta = C.$$

En combinant ensuite cette intégrale avec (37) et cette même équation écrite pour $''\xi_1$, $''\eta_1$, il vient

$$''\eta_1 ''\xi - ''\xi_1 ''\eta = \sqrt{1 - C^2},$$

équation de laquelle et de (46) on tire

$$(47)\qquad ''\xi = C\,''\xi_1 + \sqrt{1 - C^2}\,''\eta_1, \qquad ''\eta = -\sqrt{1 - C^2}\,''\xi_1 + C\,''\eta_1,$$

à cause de $''\xi_1^2 + ''\eta_1^2 = 1$ (37). La combinaison de ces formules avec (44) conduit visiblement ensuite à

$$(48)\qquad ''\mathfrak{r} = \mathrm{A} + \mathrm{C}\,''\mathfrak{r}_1 + \sqrt{1-\mathrm{C}^2}\,''\mathfrak{y}_1, \qquad ''\mathfrak{y} = \mathrm{B} - \sqrt{1-\mathrm{C}^2}\,''\mathfrak{r}_1 + \mathrm{C}\,''\mathfrak{y}_1,$$

où A, B sont deux autres constantes arbitraires.

II. En représentant par $''x_1$, $''y_1$ les seconds membres des deux premières formules (45) réalisant l'application fournie par les intégrales particulières $''\xi_1$, $''\eta_1$, $''\mathfrak{r}_1$, $''\mathfrak{y}_1$, toute autre application sera réalisée, en vertu de (47), (48), par les formules

$$''x = \mathrm{A} + \mathrm{C}\,''x_1 + \sqrt{1-\mathrm{C}^2}\,''y_1, \qquad ''y = \mathrm{B} - \sqrt{1-\mathrm{C}^2}\,''x_1 + \mathrm{C}\,''y_1.$$

Il en résulte immédiatement que, *dans deux applications, les correspondantes,* $[''\mathcal{F}_1]$, $[''\mathcal{F}]$ *à une même figure quelconque* $['\mathcal{F}]$ *tracée sur la surface, sont toujours superposables par simple déplacement dans le plan d'application, puis inversement, que si* $[''\mathcal{F}]$ *est une figure superposable à* $[''\mathcal{F}_1]$ *par un déplacement de ce genre, il y a toujours une application donnant* $[''\mathcal{F}]$ *pour correspondante à* $['\mathcal{F}]$.

Car (en se restreignant, comme de raison, à des applications non imaginaires) les formules précédentes sont précisément celles qui procureraient le passage des coordonnées rectangulaires $''x_1$, $''y_1$ à des coordonnées $''x$, $''y$ relatives à la nouvelle origine (A, B) et à de nouveaux axes dont les directions *positives* coïncideraient toutes deux avec celles des anciens axes, déplacées par une rotation simultanée, d'une *même* amplitude marquée par l'angle de $\cos = \mathrm{C}$, de $\sin = -\sqrt{1-\mathrm{C}^2}$.

Cette observation identifie toutes les applications que nous considérons, et permet de n'en considérer qu'une seule.

III. Comme on obtient la trajectoire $['\mathfrak{T}]$, ou une génératrice quelconque de la surface, en faisant, dans les équations (23), p indéterminée et $q = 0$, ou $p =$ constante et q indéterminée, les mêmes hypothèses réalisées dans les équations (45) donneront, pour leurs correspondantes, la ligne $[''\mathfrak{T}]$ représentée par

$$(49)\qquad ''x = ''\mathfrak{r}, \qquad ''y = ''\mathfrak{y},$$

et une certaine droite ayant précisément $''\xi$, $''\eta$ pour cosinus direc-

teurs en vertu des équations (45), (37), et qui, à cause de (38), coupe toujours orthogonalement la ligne (49), c'est-à-dire $[''\varpi]$.

Ainsi donc *les génératrices de la surface ont toujours pour correspondantes des droites aussi, formant une famille au seul paramètre p, dont $[''\varpi]$ est une trajectoire orthogonale.* [Ceci était à prévoir; car (29) chaque génératrice étant une ligne géodésique de la surface qui coupe $['\varpi]$ à angle droit, sa correspondante ne peut manquer d'être aussi une ligne géodésique du plan (32) (155), c'est-à-dire une droite, et de couper $[''\varpi]$ sous le même angle (154)].

IV. Quand la surface développable est un cylindre (144), $'\xi$, $'\eta$, $'\zeta$ se réduisent à des constantes, d'où

$$\frac{d'\xi}{dp} = \frac{d'\eta}{dp} = \frac{d'\zeta}{dp} = \frac{d'\sigma}{dp} = \frac{d''\xi}{dp} = \frac{d''\eta}{dp} = 0,$$

à cause des relations (28), (43). Il en résulte que $''\xi$, $''\eta$ sont aussi des constantes, par suite (III) que, *sur le plan, les correspondantes aux génératrices de la surface sont des droites toutes parallèles aussi, et que leur trajectoire $[''\varpi]$ est une autre droite perpendiculaire à toutes celles-ci* (129, III).

Réciproquement, *la surface est un cylindre quand son application se fait ainsi;* car on tire des équations (43), (37) $\frac{d'\sigma}{dp} = 0$, puis des relations (29) $\frac{d'\xi}{dp} = \frac{d'\eta}{dp} = \frac{d'\zeta}{dp} = 0$.

V. Quand la surface est un cône de sommet $('x_0, 'y_0, 'z_0)$, la trajectoire $['\varpi]$ est située sur quelque sphère ayant ce point pour centre (129, IV), et, pour $'x = 'x_0$, $'y = 'y_0$, $'z = 'z_0$, on peut satisfaire aux équations (23) par $q = q_0$, quantité indépendante de p (c'est le rayon de la sphère).

Les identités

$$'x_0 = '\mathfrak{x} + '\xi q_0, \qquad 'y_0 = '\mathfrak{y} + '\eta q_0, \qquad 'z_0 = '\mathfrak{z} + '\zeta q_0,$$

différentiées et combinées avec (30), donneront

$$\frac{d's}{dp} + q_0 \frac{d'\sigma}{dp} = 0,$$

moyennant quoi, les équations (43), (44) donneront à leur tour

$$\frac{d}{dp}({}''\mathfrak{x} + {}''\xi q_0) = \frac{d}{dp}({}''\mathfrak{y} + {}''\eta q_0) = 0,$$

puis, en intégrant et appelant ${}''x_0$, ${}''y_0$ deux certaines constantes,

$${}''x_0 = {}''\mathfrak{x} + {}''\xi q_0, \qquad {}''y_0 = {}''\mathfrak{y} + {}''\eta q_0.$$

Les correspondantes aux génératrices passent donc toutes aussi par le point fixe (${}''x_0$, ${}''y_0$, o), *et leur trajectoire* $[{}''\mathfrak{T}]$ *est une circonférence ayant ce point pour centre.*

Réciproquement, *la surface est un cône quand son application s'opère ainsi*, ce que le raisonnement inverse montre sans difficulté.

VI. Hors le cas du cylindre et celui du cône examinés ci-dessus, la surface développable possède une arête de rebroussement $[{}'\mathcal{A}]$ [dont la trajectoire $[{}'\mathfrak{T}]$ est précisément une *développante* (198, *inf.*)], et l'on ne peut avoir $\frac{d'\sigma}{dp} = 0$ identiquement, car autrement la surface serait un cylindre (IV). De plus, le point du plan qui correspond au point courant de $[{}'\mathcal{A}]$ se déplace certainement avec lui, et décrit une véritable ligne $[{}''\mathcal{A}]$; car, s'il était fixe, les correspondantes des génératrices y passeraient toutes, et la surface serait un cône (V).

Si maintenant on nomme ${}'q$ la valeur de q donnant pour chaque génératrice (23) son point de contact avec son enveloppe $[{}'\mathcal{A}]$, et si, après avoir écrit pour le cas présent les équations (5) du n° 98, on les ajoute après multiplication par $\frac{d'\xi}{dp}$, $\frac{d'\eta}{dp}$, $\frac{d'\zeta}{dp}$, on trouvera, en ayant égard à (27), (30), (28),

$$(50) \qquad {}'q = -\frac{d'\mathfrak{s}}{dp} : \frac{d'\sigma}{dp}.$$

En appelant encore ${}''q$ la valeur de q donnant les coordonnées du point de contact de la droite (45) avec son enveloppe, on trouvera

$$(51) \qquad {}''q = -\frac{d'\mathfrak{s}}{dp} : \frac{d'\sigma}{dp} = {}'q,$$

en opérant de la même manière et en ayant égard aux relations (39), (41), (42).

Ainsi donc, *la correspondante* [″𝒜] *de l'arête de rebroussement est aussi l'enveloppe des correspondantes aux génératrices, c'est-à-dire* (197, I, *inf.*) *la développée plane de la trajectoire* [″𝒞], puisque ces droites correspondantes sont précisément les normales principales (125) de cette dernière ligne plane. En outre elle est *courbe;* car, si elle était droite, $''\xi$, $''\eta$, cosinus directeurs de la tangente, conserveraient des valeurs constantes et la surface serait un cylindre (IV).

VII. On calculera le carré de la dérivée par rapport à p de l'arc de l'arête [′𝒜], en substituant $'q$ à q dans les équations (23), les différentiant, ajoutant leurs carrés et ayant égard aux relations (27), (25), (30), (50); il reste ainsi

$$\left(\frac{d'q}{dp}\right)^2.$$

On calculera le même carré pour l'arc correspondant de la courbe [″𝒜], en substituant $''q$ à q dans les équations (45), les différentiant, ajoutant leurs carrés et ayant égard à (39), (38), (41), (40), (42), (37), (51); il reste encore

$$\left(\frac{d''q}{dp}\right)^2.$$

Comme $'q$, $''q$ sont des fonctions de p identiquement égales à cause de (51), *des arcs correspondants sur l'arête* [′𝒜] *et sur sa correspondante* [″𝒜] *sont toujours égaux en longueur.*

[Cette constatation, celles aussi des alinéas V, VI, peuvent sembler superflues; nous les croyons toutefois nécessaires, parce que les théories générales perdent toute consistance aux points singuliers des figures (2), (8), et que sont tels le sommet d'un cône (147), ainsi que les points de l'arête de rebroussement pour toute autre surface développable (109). On peut vérifier *a posteriori* l'exactitude de ce dernier fait, en constatant que les déterminants différentiels par rapport à p, q des seconds membres des équations (23) s'évanouissent toujours simultanément sur l'arête, à cause des relations (50), (29) (6, *in fine*)].

L'égalité des arcs correspondants des courbes [′𝒜], [″𝒜], l'éga-

lité simultanée de ceux de leurs indicatrices sphériques (182, *inf.*), assurée par l'équation (42), montrent que *leurs premières courbures sont toujours égales aussi aux points correspondants* (184, *inf.*).

D'une observation faite tout à l'heure (VI), il résulte que les points du plan d'où quelque tangente (réelle) peut être menée à la courbe $[''\mathcal{A}]$ sont les seuls que ceux de la surface puisse avoir pour correspondants. Mais, comme de tout point d'une tangente à une courbe plane, pris suffisamment voisin du contact, on peut mener à cette ligne une seconde tangente réelle au moins (nous devons supprimer la démonstration imitant tout à fait celle apportée au milieu du n° 93 à l'appui d'une assertion analogue), *le correspondant de tout point de la surface suffisamment voisin de l'arête correspond certainement aussi à un point de la surface situé sur une autre génératrice, partant distinct du premier,* et il est évident que *ces deux points de la surface appartiennent respectivement à ses deux nappes* (150, III).

VIII. Comme on passe de la première forme du système des équations différentielles (43), (44) à la seconde, par la transposition des notations x, $\mathfrak{x}$, ξ, avec y, $\mathfrak{y}$, η, opération ne provoquant que de simples permutations dans les autres formules, toutes nos conclusions subsistent pour les intégrales de la seconde forme et pour les applications du *second genre* qu'elles fournissent. En outre, ces dernières intégrales seront évidemment données par les formules

$$''\xi = -\sqrt{1-C^2}\,''\xi_1 + C\,''\eta_1, \qquad ''\eta = C\,''\xi_1 + \sqrt{1-C^2}\,''\eta_1,$$
$$''\mathfrak{x} = B - \sqrt{1-C^2}\,''\mathfrak{x}_1 + C\,''\mathfrak{y}_1, \qquad ''\mathfrak{y} = A + C\,''\mathfrak{x}_1 + \sqrt{1-C^2}\,''\mathfrak{y}_1,$$

naissant de (47), (48) par les transpositions de $''\xi$ avec $''\eta$ et de $''\mathfrak{x}$ avec $''\mathfrak{y}$. Et, en appelant toujours $''x_1$, $''y_1$, les seconds membres des deux premières équations (45) réalisant l'application du premier genre fournie par ces intégrales particulières $''\xi_1, \ldots, ''\mathfrak{y}_1$ considérées dans l'alinéa I, toutes les applications du second genre seront réalisées par les formules

$$''x = B - \sqrt{1-C^2}\,''x_1 + C''y_1, \qquad ''y = A + C''x_1 + \sqrt{1-C^2}\,''y_1.$$

Ici, deux figures correspondantes à la même figure $['\mathcal{F}]$ de la

surface seront bien toujours superposables *l'une à l'autre* par simple glissement de l'une sur leur plan commun; mais *aucune d'elles (sauf le cas où elle serait douée d'un axe ou d'un centre de symétrie) ne l'est de cette manière à une figure correspondante à* $['\mathcal{F}]$ *dans une application du premier genre.* Car les hypothèses $A = B = C = 0$, $\sqrt{1 - C^2} = -1$, donnent pour correspondante du second genre à $['\mathcal{F}]$, la figure $[''\mathcal{F}_2]$ liée à $[''\mathcal{F}_1]$ par les formules de transformation

$$''x_2 = ''x_1, \qquad ''y_2 = -''y_1,$$

montrant que $[''\mathcal{F}_2]$ n'est que symétrique à $[''\mathcal{F}_1]$ par rapport à l'axe des $''x$.

IX. Inversement, *on peut tout aussi bien appliquer un plan sur une surface développable quelconque;* et il résulte des n°s 29, 155, que *les lignes géodésiques de la surface sont les correspondantes à toutes les droites du plan.*

Comme, sur le plan, les correspondantes des génératrices d'un cylindre sont des droites parallèles (IV), et qu'une droite quelconque de ce plan coupe toutes celles-ci sous le même angle, *toute ligne géodésique d'un cylindre est une ligne coupant ses génératrices sous un même angle* (154), c'est-à-dire une hélice de ce cylindre (132). Réciproquement, toute hélice tracée sur un cylindre en est une ligne géodésique, parce que sa correspondante plane est une trajectoire à inclinaison constante des droites parallèles qui correspondent aux génératrices du cylindre.

162. Le fait mathématique de l'applicabilité d'un plan sur une surface développable quelconque explique la possibilité physique de réaliser toutes les surfaces de ce genre au moyen de plaques matérielles flexibles, d'abord planes, puis déformées convenablement sans déchirure, ni plissure, ni extension, ni rétrécissement. En tant qu'elle concerne le cylindre, le cône aussi, mais moins fréquemment, elle est utilisée continuellement par les chaudronniers, ferblantiers, cartonniers, etc. La possibilité inverse l'est par les verriers qui soufflent d'abord les verres à vitres sous forme de cylindres, fendus ensuite suivant une génératrice, puis étalés sur un plan, après ramollissement au feu.

Une observation générale faite au n° 156 est justifiée expérimentalement par l'enroulement indéfini d'un plan flexible, d'une étoffe par exemple, sur un cylindre rigide ou sur un cône à directrices fermées; car, dans le premier cas, l'opération exige évidemment que des points distincts de l'étoffe en nombre illimité viennent tous s'appliquer successivement sur un même point du tambour. Elle l'avait été théoriquement déjà par la remarque finale de l'alinéa VII, montrant que *les parties des deux nappes d'une surface développable flexible se doublent nécessairement dans le voisinage de la correspondante de l'arête, quand on les applique simultanément sur un même plan rigide.*

Toute surface applicable sur un plan étant nécessairement développable (160), une déformation quelconque d'une plaque plane flexible, faite toutefois sans déchirure, etc., ne donnera jamais qu'une surface de ce genre. Le lecteur en obtiendra facilement un modèle, doué d'une véritable arête de rebroussement, en superposant deux feuilles de papier, y ouvrant aux ciseaux une échancrure concave de forme courbe quelconque, collant l'une à l'autre les lèvres de cette double découpure, puis la déformant par traction de manière à la rendre gauche et à disjoindre les feuilles de papier sans cassure. De celles-ci, il verra naître les deux nappes d'une surface développable ayant pour arête le contour de l'échancrure déformé.

163. En appliquant les considérations du n° 115 au cas où ses équations (22), étant toutes deux linéaires en x, y, z, représentent une droite à un paramètre, on aperçoit immédiatement que les fonctions A_1, A_2, $'A_1$, $'A_2$ peuvent être prises indépendantes de x, y, z, que, par suite, les équations (24) du numéro cité peuvent représenter un plan. D'où la réciproque de la proposition formulée dans l'alinéa III du n° 150 : *Une droite mobile à un seul paramètre engendre une surface développable, quand elle reste parallèle à une droite fixe, ou passe par un point fixe, ou bien enveloppe une courbe fixe.*

Les deux premières parties de cette réciproque ont déjà été établies au n° 153. Quant à la dernière, qui pourrait l'être autrement et presque immédiatement en remarquant que le plan oscu-

lateur d'une ligne gauche admet pour seule indéterminée la valeur correspondante de la variable auxiliaire t, au moyen de laquelle les coordonnées de son point de contact sont exprimables, que, dès lors, il enveloppe une certaine surface développable (107), (150), puis en prouvant que sa caractéristique est précisément la tangente à la ligne au même point. elle constitue une propriété générale des lignes gauches qui n'est pas sans intérêt.

Combinée avec la théorie générale des enveloppes de surfaces à un paramètre, elle donne les corollaires suivants.

Chaque tangente à une ligne gauche est la position limite de l'intersection du plan osculateur au même point par un autre infiniment voisin (111).

Chaque point d'une ligne gauche est la position limite de l'intersection du plan osculateur en ce point, soit par une tangente en un point infiniment voisin, soit par les plans osculateurs en deux semblables points (112). Etc.

163 *bis*. De la première observation faite ci-dessus (163), il résulte que *l'équation* (6) *du n° 98 constitue la condition nécessaire et suffisante pour que la surface engendrée par la droite* (4) *de même numéro soit développable*.

Surfaces gauches.

164. Une surface est dite *gauche* quand elle est réglée (14) sans être développable (150), et on réserve le nom de *génératrice* à la droite mobile qui l'engendre. Tels sont, par exemple, le paraboloïde hyperbolique et l'hyperboloïde à une nappe.

Les équations d'une droite à un paramètre p pouvant être écrites

$$(1) \qquad X = x + \xi q, \qquad Y = y + \eta q, \qquad Z = z + \zeta q,$$

où q est la variable auxiliaire intervenant dans ce mode de représentation, où x, y, z, ξ, η, ζ sont des fonctions données de p, les mêmes équations, conçues comme impliquant p, q au titre commun de variables auxiliaires, seront, sous la troisième forme,

ici la plus simple, celles d'une surface réglée, gauche par suite, si la condition (6) du n° 98 n'est pas remplie (163 *bis*), c'est-à-dire, si avec nos notations actuelles, et en posant

(1 *bis*) $$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dp} & \frac{dy}{dp} & \frac{dz}{dp} \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{d\xi}{dp} & \frac{d\eta}{dp} & \frac{d\zeta}{dp} \end{vmatrix},$$

on a

(2) $$\mathfrak{D} \neq 0.$$

164 *bis*. Notons en passant les deux allures de la génératrice, topographiquement bien distinctes, qui correspondent aux signes opposés que peut offrir le déterminant (2) (dans les circonstances où il n'est pas nul accidentellement).

En attribuant à p un accroissement infiniment petit Δp, on obtient, sur la ligne

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z,$$

directrice de la surface, un point (x', y', z') infiniment voisin de (x, y, z), sur la surface, en même temps, une génératrice infiniment voisine de (1), caractérisée par les nouveaux paramètres de direction ξ', η', ζ', et le signe final du premier des déterminants

(2 *bis*) $$\begin{vmatrix} x'-x & y'-y & z'-z \\ \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'-x & y'-y & z'-z \\ \xi & \eta & \zeta \\ \xi'-\xi & \eta'-\eta & \zeta'-\zeta \end{vmatrix},$$

indépendant de celui de Δp, parce que le second est un infiniment petit d'ordre pair 2 par rapport à Δp, est évidemment celui du déterminant (1 *bis*).

Si donc, ce dernier est positif, le premier des déterminants (2 *bis*) finira par demeurer tel, et le trièdre formé par la direction de la droite $\overline{(x, y, z)(x', y', z')}$, par celles de la première génératrice (ξ, η, ζ) et de la deuxième (ξ', η', ζ'), finira par être *isoïde* (158 *bis*) à celui des parties positives des axes des x, des y et des z; ou bien, en adoptant pour celles-ci la disposition préférée dans les Ouvrages didactiques (l'axe des x tracé, par exemple, de gauche à droite horizontalement sur un tableau ver-

tical, celui des z verticalement de bas en haut, la partie positive de celui des y perpendiculairement au mur et en avant de lui), un observateur placé les pieds en (x, y, z), la tête en (x', y', z') estimera s'être fait, de sa gauche à sa droite, par devant lui, le mouvement de la génératrice passant de la direction (ξ, η, ζ) à la direction (ξ', η', ζ'). Si le déterminant (1 *bis*) est négatif, le trièdre ci-dessus est *anisoïde* (*loc. cit.*) à celui des parties positives des axes, et le mouvement de la génératrice semble s'être effectué de droite à gauche.

165. Chaque génératrice, située tout entière sur la surface, offre avec elle, en chacun de ses points, un contact d'ordre illimité; par suite (78), elle est située tout entière aussi sur le plan tangent à la surface en ce point quel qu'il soit. Quand ce point se déplace sur une génératrice fixe, le plan tangent qui passe ainsi sans cesse par cette droite se déplace certainement aussi, sauf peut-être pour certaines génératrices exceptionnelles.

Effectivement, les coefficients A, B, C des coordonnées dans

$$(3) \qquad \mathrm{AX} + \mathrm{BY} + \mathrm{CZ} = 0,$$

équation du plan parallèle au plan tangent mené par l'origine, sont

$$(4) \qquad \mathrm{A} = \begin{vmatrix} \frac{dy}{dp} & \eta \\ \frac{dz}{dp} & \zeta \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} \frac{d\eta}{dp} & \eta \\ \frac{d\zeta}{dp} & \zeta \end{vmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \ldots, \qquad \mathrm{C} = \ldots,$$

déterminants différentiels par rapport à p, q des seconds membres des équations (1) (75). Si donc, pour une génératrice quelconque, les plans tangents, en tous ses points, coïncidaient, A, B, C resteraient, quel que fût q, proportionnels à trois fonctions de p seulement; par suite, les premiers termes de A, B, C resteraient, quel que fût p, proportionnels aux coefficients de q, ce qui entraînerait immédiatement la condition (6) du n° 98, et la surface ne serait pas gauche (163 *bis*).

La division formée par les points d'une même génératrice est homographique au faisceau formé par les plans tangents à la surface dont ils sont les contacts. Car, d'après les formules (4), l'équation générale (3) des plans parallèles, menés par

l'origine, contient linéairement, comme les coordonnées (1) du point de contact, la seule indéterminée q.

Quand le contact s'éloigne indéfiniment sur cette génératrice, q est infinie, et le plan tangent tend évidemment vers une position limite qu'on nomme *le plan tangent au point de la surface situé à l'infini sur cette génératrice*. Pour cette position limite, A, B, C sont évidemment proportionnels aux coefficients de q dans les seconds membres des formules (4).

La relation si simple, existant ainsi entre les points d'une même génératrice et les plans tangents dont ils sont les contacts, permet, dès que l'on connaît seulement trois de ces points et les plans tangents correspondants, de construire, soit le plan tangent en un quatrième point quelconque de la même génératrice, soit le point de contact d'un plan quelconque passant par la même droite. Car le rapport anharmonique des quatre éléments de même espèce qui sont connus fait connaître celui de l'élément inconnu et de ses trois congénères connus.

166. Outre le sens du mouvement de la génératrice (164 *bis*), le signe du déterminant (1 *bis*) règle encore celui d'un plan tangent dont le point de contact se déplace sur une génératrice fixe.

En supposant, dès à présent pour plus de commodité, que les axes sont rectangulaires, que ξ, η, ζ sont égaux aux cosinus directeurs de la génératrice, liés en conséquence par la relation

$$(5) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

d'où

$$(5\ bis) \qquad \xi \frac{d\xi}{dp} + \eta \frac{d\eta}{dp} + \zeta \frac{d\zeta}{dp} = 0,$$

nous nommerons *élues* la direction de la génératrice spécifiée par ces cosinus ξ, η, ζ et celle de la normale à la surface dont les cosinus directeurs ont les signes des seconds membres des formules (4), qu'ici nous écrirons plus simplement

$$A = a + q\alpha, \qquad B = b + q\beta, \qquad C = c + q\gamma.$$

Cela posé, si l'on passe d'un point d'une même génératrice $[p]$, correspondant à $q = q_1$, à un autre correspondant à $q = q_2$, *en y marchant dans la direction élue,* on aura $q_2 > q_1$, et les direc-

tions élues de $[p]$, de la première normale à la surface et de la seconde formeront un trièdre *isoïde* ou *anisoïde* (158 *bis*) à celui des parties positives des axes des x, des y et des z, selon que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = (q_2 - q_1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix},$$

ou bien ce dernier Θ, à cause de $q_2 - q_1 > 0$, auront le signe $+$ ou le signe $-$. Mais, en multipliant Θ, ligne à ligne, par le déterminant (1 *bis*), il vient facilement

$$\Theta\,\mathcal{D} = \begin{vmatrix} a\dfrac{dx}{dp}+\ldots, & a\xi+\ldots, & a\dfrac{d\xi}{dp}+\ldots \\ \alpha\dfrac{dx}{dp}+\ldots, & \alpha\xi+\ldots, & \alpha\dfrac{d\xi}{dp}+\ldots \\ \xi\dfrac{dx}{dp}+\ldots, & \xi\xi+\ldots, & \xi\dfrac{d\xi}{dp}+\ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 0, & \mathcal{D} \\ -\mathcal{D}, & 0, & 0 \\ \xi\dfrac{dx}{dp}+\ldots, & 1, & 0 \end{vmatrix} = -\mathcal{D}^2,$$

en ayant égard à des réductions évidentes, puis enfin $\Theta = -\mathcal{D}$, à cause de (2).

Le trièdre défini ci-dessus sera donc isoïde ou anisoïde à celui des axes, selon que $\mathcal{D}$ sera négatif ou positif; et, dans la disposition de ces derniers spécifiée au nº 164 bis, un observateur couché sur la génératrice pour assister au mouvement d'un point remontant sur celle-ci de ses pieds à sa tête, ainsi qu'à la rotation simultanée de la normale en ce point (ou du plan tangent, c'est la même chose), verra cette rotation s'effectuer de gauche à droite ou de droite à gauche selon que $\mathcal{D}$ sera négatif ou positif.

167. Comme, en supposant (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') liés par la relation (5), le radical figurant dans l'expression (7) du nº 99 peut être écrit

$$\sqrt{(\xi^2+\ldots)(\xi'^2+\ldots)-(\xi\xi'+\ldots)^2} = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sin\theta,$$

où θ représente l'angle des droites $[a]$, $[a']$ que nous supposerons infiniment voisines; comme le quotient de ce radical par Δa a pour

limite

$$\sqrt{\left(\eta\frac{d\zeta}{da}-\zeta\frac{d\eta}{da}\right)^2+\ldots}=\sqrt{[\xi^2+\ldots]\left[\left(\frac{d\xi}{da}\right)^2+\ldots\right]-\left(\xi\frac{d\xi}{da}+\ldots\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{d\xi}{da}\right)^2+\ldots},$$

on voit sans peine, d'après le numéro cité et en revenant à nos notations actuelles, que le rapport de la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines au sinus de leur angle tend vers une limite représentée par la valeur numérique de l'expression

$$\mathfrak{D}:\left[\left(\frac{d\xi}{dp}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dp}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dp}\right)^2\right].$$

Si, dans ce rapport, on change le signe de $\mathfrak{D}$, en permutant, par exemple, les deux dernières lignes du déterminant (1 *bis*), il devient le *paramètre de distribution* de la surface gauche considérée.

Pour une surface réglée gauche et sa symétrique par rapport à quelque plan (ou quelque point), les rotations du plan tangent définies ci-dessus (166, *in fine*) sont évidemment de sens contraires. Il en résulte que leurs paramètres de distribution sont aussi de signes contraires sur leurs génératrices correspondantes. Cette particularité se présente sur une même surface réglée du deuxième degré, pour deux génératrices appartenant à des systèmes différents, puisque les deux systèmes sont symétriques l'un à l'autre par rapport à un plan principal.

168. Sur chaque génératrice, on nomme *point central* la position limite du pied de sa plus courte distance à la génératrice infiniment voisine. La valeur $\mathfrak{q}$ de q donnant le point central est une fonction de p que nous allons calculer.

En appelant p' la valeur de p qui fournit une génératrice infiniment voisine, puis $x', \ldots, \xi', \ldots$ les valeurs correspondantes de $x, \ldots, \xi, \ldots$, puis enfin q, q' les valeurs de q donnant sur ces deux génératrices les pieds de leur plus courte distance, les équations

$$\left\{\begin{aligned}&-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)q+(\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta')q'\\&\qquad+\xi(x'-x)+\eta(y'-y)+\zeta(z'-z)=0,\\&-(\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta')q+(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)q'\\&\qquad+\xi'(x'-x)+\eta'(y'-y)+\zeta'(z'-z)=0;\end{aligned}\right.$$

exprimant la perpendicularité, sur la première génératrice et sur la seconde, de la droite joignant les points (p, q), (p', q'), serviront à déterminer q. Il vient ainsi

$$q = \frac{\mathrm{O}}{\Omega},$$

avec

$$\mathrm{O} = \begin{vmatrix} \xi(x'-x)+\dots, & \xi\xi'+\dots \\ \xi'(x'-x)+\dots, & \xi'^2+\dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi\,\Delta x+\dots, & \xi\xi'+\dots \\ \Delta\xi\,\Delta x+\dots, & {}'\Delta\xi+\dots \end{vmatrix},$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} \xi^2+\dots, & \xi\xi'+\dots \\ \xi\xi'+\dots, & \xi'^2+\dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^2+\dots, & \xi\xi'+\dots \\ \xi\,\Delta\xi+\dots, & \xi'\Delta\xi+\dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^2+\dots, & \xi\,\Delta\xi+\dots \\ \xi\,\Delta\xi+\dots, & \Delta\xi^2+\dots \end{vmatrix}.$$

si l'on pose $p'-p=\Delta p$, $x'-x=\Delta x$, ..., $\xi'-\xi=\Delta\xi$, ... En faisant tendre ensuite p' vers p, par suite x', ..., ξ', ... vers x, ..., ξ, ..., en ayant égard aux relations (5), (5 *bis*), on trouve facilement

$$\lim\frac{\mathrm{O}}{\Delta p^2} = \frac{1}{dp^2}\begin{vmatrix} \xi\,dx+\dots, & \xi^2+\dots \\ d\xi\,dx+\dots, & \xi\,d\xi+\dots \end{vmatrix} = -\frac{d\xi\,dx+d\eta\,dy+d\zeta\,dz}{dp^2},$$

$$\lim\frac{\Omega}{\Delta p^2} = \frac{1}{dp^2}\begin{vmatrix} \xi^2+\dots, & \xi\,d\xi+\dots \\ \xi\,d\xi+\dots, & d\xi^2+\dots \end{vmatrix} = \frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{dp^2}.$$

On a donc

$$(6) \qquad \mathfrak{q} = \lim q = -\frac{d\xi\,dx+d\eta\,dy+d\zeta\,dz}{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2},$$

valeur dont la substitution à q dans les équations (1), donne les coordonnées du point central en fonction de p.

Le lieu du point central est *la ligne de striction* de la surface, dont la considération offre un certain intérêt, et dont les équations se forment par la simple substitution, à q dans les équations (1), de la valeur fournie pour $\mathfrak{q}$ par la formule (6).

Le second membre de la formule (6) étant (sauf les notations) identique à l'expression fournie pour T par les équations (5) du n° 98 pour le cas où la droite (1) serait douée d'une enveloppe (*Cf.* 161, VI), *la ligne de striction, définie de la même manière pour une surface développable, est précisément l'arête de rebroussement de cette surface.*

169. Pour chaque génératrice, on nomme plan *central* celui qui touche la surface en son point central. Les coefficients des

coordonnées dans son équation s'obtiennent ainsi en faisant $q = \mathrm{q}$ dans les formules (4). En ayant égard aux valeurs trouvées ci-dessus (165) pour les coefficients du plan tangent dont le contact est à l'infini sur la même génératrice, un calcul sans difficulté montrera que *ces deux plans tangents sont perpendiculaires l'un sur l'autre*.

170. La droite menée par un point fixe de l'espace, parallèlement à la génératrice d'une surface réglée, engendre une surface conique nommée le *cône directeur* de la surface. Quand ce cône se réduit à un simple plan, la surface est dite *à plan directeur*. Parmi les surfaces gauches de ce genre, la plus simple est le *conoïde* dont la génératrice s'appuie sans cesse sur une droite fixe, dite l'*axe* du conoïde, en restant ainsi parallèle au plan directeur; telle est, en particulier, le paraboloïde hyperbolique, nommé quelquefois *plan gauche*.

En prenant pour plan des xy et pour axe des z, dans un système de coordonnées même obliques, le plan directeur et l'axe d'un conoïde, la génératrice a des équations de la forme

$$y = mx,$$
$$z = k,$$

m, k étant des fonctions données du paramètre α, et l'élimination de celui-ci donne pour le conoïde une équation de la forme

$$(7) \qquad z = \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right),$$

où la fonction F dépend de la nature spéciale de la surface.

L'élimination de $\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right)$ entre les équations

$$\frac{dz}{dx} = -\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2},$$
$$\frac{dz}{dy} = \mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x},$$

déduites de la précédente par des différentiations par rapport à x et à y, donne

$$(8) \qquad x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0,$$

pour équation aux dérivées partielles de tout conoïde dont le plan directeur et l'axe se confondent avec le plan des xy et l'axe des z.

L'équation (8) exprime géométriquement, que le plan tangent au conoïde rencontre toujours son axe au même point que le plan parallèle au plan directeur mené par le point de contact (75). Comme elle est du premier ordre et linéaire par rapport aux dérivées de z, la méthode de Jacobi (71***) lui est applicable et conduit aux équations auxiliaires

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0};$$

celles-ci ont pour intégrales générales évidentes

$$z = C, \qquad y = C_1 x,$$

d'où, pour z en fonction de x, y, l'équation (7) dans laquelle il faut maintenant considérer F comme une composante arbitraire.

L'axe d'un conoïde, quand il est perpendiculaire au plan directeur, est évidemment la ligne de striction de la surface (168).

Pour toutes les surfaces réglées (gauches ou développables), une coordonnée, considérée comme fonction des deux autres, satisfait à une même équation aux dérivées partielles du troisième ordre, dont la formation offre peu de difficulté et un médiocre intérêt.

Surfaces de révolution.

171. Une sphère mobile à un seul paramètre a est représentée, en coordonnées rectangulaires, par une équation de la forme

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 2\mathfrak{p}(a)x + 2\mathfrak{q}(a)y + 2\mathfrak{r}(a)z + 2\mathfrak{s}(a) = 0,$$

où $\mathfrak{p}(a)$, ... sont quatre fonctions données de a, et son enveloppe (107 *et suiv.*) a pour caractéristique la ligne représentée par cette équation, associée à celle qu'engendre sa différentiation par rapport à a,

$$(2) \qquad \mathfrak{p}'(a)x + \mathfrak{q}'(a)y + \mathfrak{r}'(a)z + \mathfrak{s}'(a) = 0.$$

La caractéristique est un cercle, puisque cette seconde équation, n'étant plus que du premier degré, appartient à un plan; et l'axe de ce cercle est précisément la tangente à la ligne, lieu du centre

de la sphère,

$$(3) \qquad X = -\rho(a), \qquad Y = -\eta(a), \qquad Z = -\iota(a),$$

construite en ce point, puisqu'il passe par ce centre, et que le plan (2) est perpendiculaire à cette tangente dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $-\rho'(a)$, $-\eta'(a)$, $-\iota'(a)$ (84).

Comme toutes les normales à la sphère (1) concourent à son centre, celles de l'enveloppe, ayant leurs pieds sur une même caractéristique, concourent au même point, parce que le contact du premier ordre existant entre elle et la sphère enveloppée, tout le long de la caractéristique, assure l'identité de leurs normales en tous les points de cette ligne. Donc, *au lieu d'avoir une enveloppe-surface, la normale générale à la surface enveloppe, qui cependant est une ligne à deux paramètres* (savoir, par exemple, les deux variables auxiliaires en fonction desquelles les coordonnées de son pied pourraient être exprimées) *ne fait que rencontrer sans cesse la ligne fixe* (3) (105).

Réciproquement, *toute surface dont la normale rencontre sans cesse la ligne* (3) *est l'enveloppe d'une sphère au seul paramètre a, ayant cette ligne pour lieu de son centre.* Car les équations de cette normale sont de la forme (30) du n° 138, à condition d'y prendre $x = -\rho(a)$, $y = -\eta(a)$, $z = -\iota(a)$, et les identités $\dfrac{dx}{db} = \dfrac{dy}{db} = \dfrac{dz}{db} = 0$ réduisent alors la condition (35, *loc. cit.*) à

$$\frac{dx}{da}\frac{d\xi}{db} + \frac{dy}{da}\frac{d\eta}{db} + \frac{dz}{da}\frac{d\zeta}{db} = 0$$

dont l'intégration par rapport à b conduit à

$$(4) \qquad \xi\frac{dx}{da} + \eta\frac{dy}{da} + \zeta\frac{dz}{da} = \sigma'(a),$$

$\sigma'(a)$ représentant une fonction arbitraire de a seulement, qu'il nous est commode d'écrire sous forme de dérivée.

Les formules (33), (34) du même numéro donnent ensuite

$$(\mathrm{t}b) = 0,$$

puis, par leur combinaison avec la précédente,

$$(\mathrm{t}a) = \sigma'(a), \qquad \mathrm{t} = -\int \sigma'(a)\,da = -\sigma(a),$$

moyennant quoi, les équations de la surface cherchée deviennent

$$X = -\mathfrak{p}(a) - \xi\sigma(a), \qquad Y = -\mathfrak{q}(a) - \eta\sigma(a), \qquad Z = -\mathfrak{r}(a) - \zeta\sigma(a),$$

ou bien encore

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\mathfrak{p}(a)X + 2\mathfrak{q}(a)Y + 2\mathfrak{r}(a)Z \\ + \mathfrak{p}(a)^2 + \mathfrak{q}(a)^2 + \mathfrak{r}(a)^2 - \sigma(a)^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}'(a)X + \mathfrak{q}'(a)Y + \mathfrak{r}'(a)Z \\ + \mathfrak{p}(a)\mathfrak{p}'(a) + \mathfrak{q}(a)\mathfrak{q}'(a) + \mathfrak{r}(a)\mathfrak{r}'(a) - \sigma(a)\sigma'(a) = 0, \end{aligned}$$

à cause de $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ et de (4).

Or, ces équations sont bien celle de quelque sphère au seul paramètre a, et le résultat de sa différentiation par rapport à a.

A ce genre de surfaces appartient la *cyclide* de Dupin, étudiée depuis par plusieurs géomètres; elle est, cela même de deux manières, l'enveloppe d'une sphère demeurant tangente à trois autres fixes. On y trouve encore la *surface canal*, enveloppe d'une sphère dont le rayon conserve une valeur constante; ici, la caractéristique est précisément la section constante de la sphère enveloppée, par le plan normal au lieu de son centre, ayant ce point pour pied. Le serpentin d'un alambic fournit un modèle de surface canal. Le tore, enveloppe d'une sphère (de rayon constant) restant tangente à trois autres fixes dont les centres sont en ligne droite, enveloppe aussi d'une sphère restant tangente à trois autres de rayons égaux, est une surface canal, cas particulier de la cyclide. Mais, de toutes les surfaces dont nous parlons, les plus intéressantes, cela surtout dans les Arts de construction, sont celles dont nous allons nous occuper.

172. Une *surface de révolution* est l'enveloppe de la sphère (1), quand le lieu de son centre se réduit à une droite, c'est-à-dire quand les fonctions $-\mathfrak{p}(a)$, $-\mathfrak{q}(a)$, $-\mathfrak{r}(a)$ sont des formes

$$x_0 + p\,\mathfrak{t}(a), \qquad y_0 + q\,\mathfrak{t}(a), \qquad z_0 + r\,\mathfrak{t}(a),$$

x_0, y_0, z_0, p, q, r, $\mathfrak{t}(a)$ représentant les coordonnées d'un point fixe de cette droite, ses paramètres de direction, et quelque fonction donnée de a.

Tous les cercles caractéristiques ont alors cette droite pour axe commun, et on la nomme aussi l'*axe* de la surface; les cercles

dont nous parlons sont ses *parallèles*. Comme chaque parallèle, solidarisé avec l'axe, ne cesse pas de coïncider avec lui-même après une rotation quelconque exécutée autour de cette droite, *la surface tout entière reste aussi en coïncidence avec elle-même après toute rotation de ce genre; d'où cet autre mode de génération, par la rotation indéfinie autour de l'axe, d'une ligne solide quelconque, tracée sur la surface de manière à rencontrer tous ses parallèles*. Parmi toutes les lignes de ce genre on considère plus volontiers les *méridiennes* de la surface, sections faites par des plans passant par l'axe, qu'on nomme des plans *méridiens*. Ces propriétés des surfaces de révolution expliquent la facilité extrême de leur réalisation matérielle, et, en même temps, leur aptitude à fournir des guides aux mouvements de rotation autour d'axes fixes, si importants dans toutes les industries mécaniques.

173. Les équations (1), (2) pouvant alors être remplacées par le système

$$\left\{\begin{array}{r}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\mathrm{S}(a),\\ px+qy+rz={}'\mathrm{S}(a),\end{array}\right.$$

où, comme $s(a)$, $t(a)$, les fonctions $\mathrm{S}(a)$, $'\mathrm{S}(a)$ peuvent évidemment être choisies arbitrairement, l'équation générale des surfaces de révolution, d'axe donné

$$(5)\qquad \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r},$$

est

$$(6)\qquad \mathrm{F}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,\ px+qy+rz]=0,$$

F représentant une composante à deux variables, dont la nature dépend de celle des deux fonctions $\mathrm{S}(a)$, $'\mathrm{S}(a)$.

Le premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation (6), c'est-à-dire la fonction la plus générale qu'il faut égaler à 0 pour avoir l'équation d'une pareille surface, satisfait à une équation aux dérivées partielles du premier ordre, débarrassée des éléments d'indétermination de la composante F, dont voici le mode de formation. En représentant par u, v les fonctions simples dont f est com-

posée, il vient immédiatement

$$\frac{df}{dx} = 2\frac{\partial F}{\partial u}(x - x_0) + p\frac{\partial F}{\partial v},$$
$$\frac{df}{dy} = 2\frac{\partial F}{\partial u}(y - y_0) + q\frac{\partial F}{\partial v},$$
$$\frac{df}{dz} = 2\frac{\partial F}{\partial u}(z - z_0) + r\frac{\partial F}{\partial v},$$

d'où, par l'élimination de $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, l'équation cherchée

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

Géométriquement, elle exprime qu'au point quelconque (x, y, z) de la surface, la normale à celle-ci,

$$(8)\ X = x + \frac{df}{dx}t', \qquad Y = y + \frac{df}{dy}t', \qquad Z = z + \frac{df}{dz}t' \qquad (118, \text{I}),$$

et l'axe

$$(9)\qquad X = x_0 + pt'', \qquad Y = y_0 + qt'', \qquad Z = z_0 + rt''$$

sont dans un même plan, t', t'' représentant ici les variables auxiliaires intervenant dans les représentations de ces deux droites appartenant au troisième mode.

Pour que ces droites offrent la disposition précitée, il faut effectivement et il suffit qu'il existe un polynôme linéaire, à coefficients non tous $= 0$,

$$\mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B}\mathcal{Y} + \mathcal{C}\mathcal{Z} + \mathcal{D},$$

se réduisant à o, quelle que soit t', par la substitution à $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ des seconds membres des équations (8), et, quelle que soit t'', par celle des expressions (9). On est ainsi conduit à la condition

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ne différant pas de l'équation (7).

Réciproquement, cette dernière équation caractérise exclusivement les surfaces de révolution d'axe commun donné (5). Car, en posant pour simplifier

$$P = \begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ q & r \end{vmatrix}, \qquad Q = \ldots, \qquad R = \ldots,$$

elle s'écrit

$$P \frac{df}{dx} + Q \frac{df}{dy} + R \frac{df}{dz} = 0,$$

et la méthode de Jacobi, applicable ici (71***), donne pour équations auxiliaires

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{df}{0},$$

d'où

$$f = C,$$

puis les deux combinaisons intégrables

$$(x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy + (z - z_0)\,dz = p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0$$

conduisant à

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = C_1,$$
$$px + qy + rz = C_2.$$

L'intégrale générale f de l'équation (7) se tire donc d'une équation finie de la forme

$$\Omega[f, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, px + qy + rz] = 0,$$

donnant bien

$$f(x, y, z) = F[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, px + qy + rz] = 0,$$

où F est une composante arbitraire à deux variables.

CHAPITRE VII.

CONTACTS D'ORDRES SUPÉRIEURS D'UNE LIGNE AVEC LE CERCLE ET LA SPHÈRE.

Cercle osculateur. — Courbure.

174. Un cercle indéterminé dans l'espace pouvant être amené à passer par trois points quelconques non en ligne droite, il peut être plié aussi à un contact du second ordre avec une ligne *courbe* donnée, en un point choisi arbitrairement sur celle-ci (65); et, comme la condition d'offrir un pareil contact le détermine ensuite entièrement, ainsi que nous allons le constater dans un instant, il est, dans cette position, le *cercle osculateur* à la ligne au point considéré (66).

Le cercle osculateur est situé dans le plan osculateur au même point (89). Car, le plan du cercle étant quelque surface qui le contient tout entier, il a aussi un contact du second ordre avec la ligne (58).

Pour la même raison, *toute sphère passant par le cercle osculateur a aussi un contact du second ordre avec la ligne.*

Le cercle osculateur est la position limite d'un cercle passant par trois points de la ligne infiniment voisins de son contact, ou bien par deux semblables points seulement, mais à la condition d'offrir en l'un d'eux un contact du premier ordre avec la ligne, c'est-à-dire d'avoir même tangente (63).

175. En vertu des remarques précédentes et du théorème du n° 59, le cercle osculateur peut être considéré comme l'intersection du plan osculateur par une sphère quelconque ayant un contact du second ordre avec la ligne au même point, en particulier par celle de toutes ces sphères dont le centre est dans le plan osculateur. Pour avoir le centre et le rayon du cercle osculateur,

il suffit donc de calculer les mêmes éléments relatifs à cette dernière sphère.

En appelant x_1, y_1, z_1 les coordonnées rectangulaires de son centre et R_1 son rayon, elle aura pour équation

$$(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 + (Z - z_1)^2 = R_1^2,$$

et ces quatre inconnues dépendront des équations simultanées

$$(1) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R_1^2,$$

$$(2) \qquad (x - x_1)\,dx + (y - y_1)\,dy + (z - z_1)\,dz = 0,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} (x - x_1)\,d^2x + (y - y_1)\,d^2y + (z - z_1)\,d^2z \\ \qquad = -(dx^2 + dy^2 + dz^2) = -ds^2 \qquad (21), \end{cases}$$

$$(4) \quad (dy\,d^2z - dz\,d^2y)(x - x_1) + (\ldots)(y - y_1) + (\ldots)(z - z_1) = 0,$$

où x, y, z sont les coordonnées du point considéré sur la ligne, et où, pour faciliter l'écriture, leurs différentielles ont été substituées à leurs dérivées par rapport à la variable auxiliaire t, en fonction de laquelle nous les sous-entendons exprimées. Les trois premières équations expriment, en effet, que la sphère a un contact du second ordre avec la ligne au point (x, y, z) (55), et la dernière, que son centre est situé dans le plan osculateur à celle-ci (89).

Les équations (2), (3), (4) sont du premier degré par rapport aux différences $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ prises pour inconnues, et le déterminant des coefficients de celles-ci se réduit à

$$(5) \quad \Delta = (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2;$$

on trouvera donc, par les formules de Cramer,

$$(6) \quad \begin{cases} x - x_1 = \dfrac{[dy(dx\,d^2y - dy\,d^2x) - dz(dz\,d^2x - dx\,d^2z)]}{\Delta}\,ds^2, \\[2ex] y - y_1 = \dfrac{[\ldots\ldots]}{\Delta}\,ds^2, \\[2ex] z - z_1 = \dfrac{[\ldots\ldots]}{\Delta}\,ds^2, \end{cases}$$

formules où les numérateurs des fractions se déduisent du premier par des permutations circulaires des lettres x, y, z.

Si maintenant on ajoute les carrés des trois numérateurs, on

trouvera facilement pour leur somme

$$(dx^2+dy^2+dz^2)[(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2]$$
$$-[dx(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+dy(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+dz(dx\,d^2y-dy\,d^2x)]^2=\Delta\,ds^2.$$

L'équation (1) donne donc

$$(7)\quad R_1=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}},$$

expression qui ne peut s'évanouir en aucun point (*ordinaire*) *de la ligne considérée* (10).

D'après les formules (6), (7), le cercle osculateur ne cesse d'exister qu'aux points (réels) de la ligne, où les binômes dont la somme des carrés fournit Δ s'évanouissent numériquement tous trois, c'est-à-dire (86) aux points où elle a un contact du second ordre avec sa tangente.

Mais alors, à cause de l'ordre de ce contact, et de ce que cette droite est la forme limite d'un cercle de rayon infini, on peut la considérer comme tenant lieu de cercle osculateur. On peut constater d'ailleurs qu'elle est la forme limite du cercle osculateur construit en un point de la ligne infiniment voisin de son contact.

La théorie dont nous nous occupons, s'applique ainsi à toutes les lignes *courbes*, sur lesquelles les points en question sont exceptionnels, mais non aux lignes *droites* dont tous les points sont au contraire de cette sorte et que nous excluons de nos recherches.

Quand la ligne est un cercle, son cercle osculateur se confond avec elle en tout point; si non, l'ordre du contact entre elle et lui ne peut surpasser 2 qu'en des points exceptionnels (71).

176. L'introduction de l'arc s permet de donner à l'expression de R_1 deux autres formes utiles.

I. On trouve facilement

$$\Delta=(dx^2+dy^2+dz^2)[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]$$
$$-(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)^2,$$

puis, en différentiant la relation de définition

$$(8)\qquad dx^2+dy^2+dz^2=ds^2,$$

cette autre du second ordre

$$(9) \qquad dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s,$$

d'après quoi l'expression de Δ ci-dessus se réduit à

$$\Delta = [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]\,ds^2,$$

et la formule (7) à

$$(10) \qquad R_1 = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

II. On a

$$d^2x = d\left(ds\,\frac{dx}{ds}\right) = d^2s\,\frac{dx}{ds} + ds\,d\,\frac{dx}{ds},$$

avec des transformations analogues pour d^2y, d^2z.

En ajoutant ces trois transformations élevées au carré, il vient

$$(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 = \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \ldots\right](d^2s)^2$$
$$+ \left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \ldots\right]ds^2 + 2\left[\frac{dx}{ds}\,d\frac{dx}{ds} + \ldots\right]ds\,d^2s,$$

et le premier terme du second membre se réduit à $(d^2s)^2$, à cause de la relation (8) écrite

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

tandis que celle-ci différentiée

$$\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds} = 0$$

fait évanouir le dernier terme. La formule (10) devient donc

$$(11) \qquad R_1 = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2}}.$$

177. L'introduction de ds, d^2s simplifie aussi les formules (6) fournissant les coordonnées du centre du cercle osculateur. En ayant égard à (8), (9), on obtient d'abord

$$dy(dx\,d^2y - dy\,d^2x) - dz(dz\,d^2x - dx\,d^2z)$$
$$= dx(dy\,d^2y + dz\,d^2z) - d^2x(dy^2 + dz^2)$$
$$= -ds(ds\,d^2x - dx\,d^2s) = -ds^3\,d\,\frac{dx}{ds}.$$

D'autre part, on a, comme nous venons de le voir implicitement (176),

$$(12)\quad \begin{cases} \Delta = ds^2[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2] \\ = ds^4\left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right], \end{cases}$$

moyennant tout quoi les formules (6) se réduisent à

$$(13)\quad \begin{cases} x-x_1 = -\left[\dfrac{ds}{\left(d\dfrac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\dfrac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\dfrac{dz}{ds}\right)^2}\right] d\dfrac{dx}{ds}, \\ y-y_1 = -[\ldots]\, d\dfrac{dy}{ds}, \\ z-z_1 = -[\ldots]\, d\dfrac{dz}{ds}. \end{cases}$$

178. Le centre du cercle osculateur étant situé dans le plan normal à la ligne en son point de contact (121), son rayon allant à ce même point est celle des normales à la ligne de même pied qui est située dans le plan osculateur; on la nomme la *normale principale*. Elle est évidemment représentée par les équations (2), (4), si l'on y considère $x_1 y_1 z_1$ comme des coordonnées courantes; car la première est celle du plan normal (122), l'autre est celle du plan osculateur.

Les cosinus des angles que fait avec les axes *sa direction*, c'est-à-dire celle allant de son pied au centre du cercle osculateur, sont évidemment proportionnels et de mêmes signes aux quantités x_1-x, y_1-y, z_1-z dont les formules (13) fournissent les valeurs, par suite à

$$d\frac{dx}{ds},\quad d\frac{dy}{ds},\quad d\frac{dz}{ds},$$

différentielles des cosinus caractérisant une direction déterminée de la tangente, *pourvu cependant que l'arc s ait été compté dans le sens où il croît avec t*. On peut donc prendre aussi pour équations de la normale principale

$$(14)\quad \frac{X-x}{d\dfrac{dx}{ds}} = \frac{Y-y}{d\dfrac{dy}{ds}} = \frac{Z-z}{d\dfrac{dz}{ds}},$$

si toutefois il ne s'agit pas de l'un des points exceptionnels dont nous parlions tout à l'heure (175, *in fine*).

179. L'axe du cercle osculateur, lieu évident des centres des sphères ayant avec la ligne au point considéré un contact du second ordre au moins (58), (59), se nomme la *droite polaire* de celle-ci pour ce point. En considérant toujours x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées courantes, cette droite est représentée par l'association des équations (2) et (3) appartenant à des plans évidemment perpendiculaires à celui du cercle osculateur et passant tous deux par son centre.

La position de la droite polaire dépend du seul paramètre t, en fonction duquel nous supposons exprimées les coordonnées du point courant de la ligne; l'équation (3) résultant précisément de la différentiation, par rapport à t, de l'équation (2) appartenant au plan normal, *la droite polaire est la génératrice de la surface développable qu'enveloppent les plans normaux* (150, I). Cette dernière porte le nom de *surface polaire* de la ligne. Il en résulte (111) que *la droite polaire est la position limite de l'intersection du plan normal par celui ayant pour pied un point infiniment voisin.*

Quand la ligne considérée est sphérique, son plan normal passe sans cesse par le centre de la sphère qui la contient, sa droite polaire aussi, et sa surface polaire se réduit à quelque cône ayant ce centre pour sommet.

Quand elle est plane, la surface polaire se réduit à un cylindre (186, *inf.*).

180. Les considérations précédentes nous permettent de compléter la propriété du plan normal signalée au n° 123 : *la distance d'un point fixe* (a, b, c) *de ce plan à son pied* (x, y, z) *est maximum ou minimum selon que, dans le plan normal, ces deux points sont séparés ou non par la droite polaire.*

La demi-dérivée seconde du carré de la distance considérée, prise par rapport à la variable auxiliaire t dont dépend la position du pied du plan normal, est effectivement

$$(x-a)\frac{d^2x}{dt^2}+(y-b)\frac{d^2y}{dt^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

quantité essentiellement positive quand (a, b, c) coïncide avec (x, y, z). Elle est donc négative ou positive selon que ces deux

points sont de part et d'autre ou non, du plan que représente l'équation (3), aux coordonnées courantes x, y, z, plan qui trace précisément la droite polaire sur le plan normal (87ter, I).

On peut ajouter qu'*il n'y a ni maximum, ni minimum, quand* (a, b, c) *se trouve, sur la droite polaire, ailleurs qu'au centre de la sphère osculatrice* (188 *et suiv., inf.*): car alors la dérivée seconde ci-dessus s'évanouit, à l'exclusion de la troisième. Quand ce point coïncide avec le centre en question, la dérivée troisième s'annule, et il y a maximum ou minimum, sauf le cas où l'ordre du contact de la sphère osculatrice s'élèverait au-dessus de 3.

181. On nomme quelquefois *binormale* à une ligne en un point, celle des normales de ce pied qui est parallèle à la droite polaire correspondante, et *plan rectifiant* son plan tangent mené par la binormale. L'enveloppe du plan rectifiant est une surface développable, dite *rectifiante*, et la génératrice de celle-ci est la *droite rectifiante* de la ligne.

182. Les rapports $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, figurant dans les relations (11), (13), (14), sont précisément les cosinus caractéristiques d'une direction déterminée de la tangente à la ligne, au point en question (84): ce sont donc les coordonnées ξ, η, ζ, fonctions de t aussi, d'une certaine ligne située sur la sphère de rayon $= 1$, ayant l'origine pour centre, que l'on appelle l'*indicatrice sphérique* de la ligne considérée. Quand cette dernière se réduit à une droite, son indicatrice dégénère en un simple point; mais, comme ce cas a été exclus (175), elle est toujours *une véritable ligne, dont les points sont certainement ordinaires quand ils correspondent aux points (réels) de la courbe proposée qui sont ordinaires et où la tangente n'offre pas un contact d'ordre* > 1.

La formule (12) montre effectivement que les égalités simultanées

$$d\frac{dx}{ds} = d\frac{dy}{ds} = d\frac{dz}{ds} = 0$$

entraînent $\Delta = 0$, et par suite, puisqu'il s'agit par hypothèse d'un point réel de la courbe proposée, la nullité simultanée des trois binômes dont les carrés figurent dans la formule (5) (86).

183. En nommant maintenant σ l'arc de l'indicatrice sphérique commençant à un point fixe quelconque de cette ligne, on aura

$$\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}=\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}=d\sigma,$$

et si l'on s'est arrangé de manière que cet arc croisse en même temps que s, arc de la courbe considérée, la formule (11) peut s'écrire

$$R_1=\frac{ds}{d\sigma}=\frac{ds}{dt}:\frac{d\sigma}{dt}=\lim\left[\frac{\Delta s}{\Delta t}:\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right]=\lim\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}.$$

Le rayon d'un cercle osculateur est ainsi la limite du rapport d'un arc infiniment petit, mesuré sur la courbe à partir du point de contact, à l'arc correspondant de son indicatrice sphérique.

Si θ est la longueur de l'arc infiniment petit, découpé par les extrémités de l'arc $\Delta\sigma$ sur le grand cercle de la sphère de rayon 1 qui passe par l'une et l'autre, le rapport $\frac{\theta}{\Delta\sigma}$ tend vers 1, limite commune des rapports des arcs θ, $\Delta\sigma$ à la longueur de la corde qui les sous-tend tous deux (23). On a donc aussi

$$(15)\qquad R_1=\lim\left[\frac{\Delta s}{\theta}\cdot\frac{\theta}{\Delta\sigma}\right]=\lim\frac{\Delta s}{\theta},$$

d'où, en remarquant que θ est précisément l'arc du cercle de rayon $=1$ qui mesure l'angle formé par les directions de même nom des tangentes à la courbe au point dont il s'agit et au point infiniment voisin : *le rayon du cercle osculateur est la limite du rapport d'un arc infiniment petit, mesuré sur la courbe à partir du point de contact, à l'angle formé par les tangentes à ses extrémités.*

La relation $\lim\frac{\Delta\sigma}{\theta}=1$ a fait donner à la différentielle $d\sigma$ le nom d'*angle de contingence* de la courbe au point considéré.

184. Pour un arc de courbe ne contenant aucun point en lequel le contact de la tangente s'élève au-dessus du premier ordre, tel, par suite, que l'arc correspondant de l'indicatrice sphérique n'offre

aucun point singulier (183), on nomme *courbure totale* l'angle formé par les directions de même nom des tangentes à ses extrémités, et *courbure moyenne* le quotient de la courbure totale par la longueur de cet arc. La *courbure en un point* est la limite de la courbure moyenne d'un arc infiniment petit, commençant à ce point.

D'après cette définition et la formule (15), *la courbure d'une ligne en un point est égale à* $\frac{1}{R_1}$, *inverse arithmétique du rayon du cercle osculateur en ce point.*

Un cercle donné se confondant avec son cercle osculateur construit en l'un quelconque de ses points (70), sa courbure est constante et égale à l'inverse de son rayon. *En tout point d'une ligne, sa courbure est donc égale à la courbure uniforme du cercle osculateur correspondant.* C'est pourquoi on nomme souvent le cercle osculateur, son rayon et son centre, *cercle, rayon* et *centre de courbure* de la ligne au point considéré.

Si l'on veut étendre cette notion jusque-là, *une ligne droite a sa courbure toujours nulle.*

185. On remarquera que *la tangente à l'indicatrice sphérique est parallèle à la normale principale à la courbe au point correspondant;* ses cosinus directeurs sont effectivement proportionnels à $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, dénominateurs des rapports figurant dans les équations (14) de la normale principale.

186. Quand il s'agit d'une courbe plane, dont nous prendrons le plan pour celui des xy, on a $z = dz = d^2 z = 0$, quelle que soit t, et $z_1 = 0$, aussi, parce que le plan osculateur est le plan même de la courbe. Les formules précédentes se simplifient beaucoup et deviennent

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R_1^2,$$

(16) $$(x - x_1)\,dx + (y - y_1)\,dy = 0,$$

(17) $$(x - x_1)\,d^2x + (y - y_1)\,d^2y = -ds^2,$$

(18) $$R_1 = \pm\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2}}.$$

En divisant par dx^3 les deux termes de la première expression de R_1, et prenant x pour variable indépendante, on obtient cette autre formule très employée dans l'étude des courbes planes

$$R_1 = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

La normale principale (178) est alors dans le plan de la courbe et se confond avec sa normale proprement dite (*Cf.* 125). Les droites polaires (179), toutes perpendiculaires au plan de la courbe, plan osculateur commun à tous ses points, sont parallèles, et la surface polaire est un cylindre.

L'indicatrice sphérique (182) se réduit à une circonférence, parce que les tangentes à la courbe sont toutes situées dans son plan (92), et qu'ainsi les rayons de la sphère de rayon 1 aboutissant aux points de l'indicatrice sont tous aussi dans un même plan.

187. *Pour une ligne plane, le lieu du centre du cercle osculateur coïncide avec l'enveloppe des normales (principales).* Car, en considérant x_1, y_1 comme des coordonnées courantes, ce centre est l'intersection des droites (16), (17) au paramètre unique t, et l'équation de la seconde se forme précisément en différentiant la première par rapport à t (102). Il en résulte (97) que, *pour chaque point de la courbe, le même centre est la position limite de la trace, sur la normale principale en ce point, de la normale de pied infiniment voisin.*

Cette propriété appartient exclusivement aux courbes planes; car les équations de la normale principale à une courbe quelconque pouvant être écrites (178)

$$X = x + \left(d\,\frac{dx}{ds}\right)T, \qquad Y = y + \left(d\,\frac{dy}{ds}\right)T, \qquad Z = z + \left(d\,\frac{dz}{ds}\right)T,$$

la propriété pour elle d'avoir une enveloppe exige (98) la condition

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ d\,\frac{dx}{ds} & d\,\frac{dy}{ds} & d\,\frac{dz}{ds} \\ d^2\,\frac{dx}{ds} & d^2\,\frac{dy}{ds} & d^2\,\frac{dz}{ds} \end{vmatrix} = 0,$$

d'où, comme au n° 89 (*in fine*),

$$\lambda \frac{dx}{ds} + \mu \frac{dy}{ds} + \nu \frac{dz}{ds} = 0,$$

λ, μ, ν désignant certaines constantes, puis multipliant par ds, intégrant et appelant ϖ une quatrième constante,

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \varpi,$$

moyennant quoi la courbe considérée est nécessairement plane. La réduction du déterminant ci-dessus, exécutée après le développement des éléments de ses deux dernières lignes, ferait d'ailleurs retomber sur l'équation (10) elle-même du numéro cité.

Sphère osculatrice. — Torsion.

188. Une sphère indéterminée dans l'espace pouvant être amenée à passer par quatre points arbitrairement donnés (non dans un même plan), peut aussi bien être assujettie à offrir un contact du troisième ordre avec une ligne donnée (non plane), en un point donné de celle-ci (65); elle est alors la *sphère osculatrice* à cette ligne, en ce point, parce que la condition de faire naître le contact en question, la détermine complètement, ainsi qu'on va le voir.

Elle passe par le cercle osculateur, parce qu'elle trace sur le plan osculateur un cercle ayant, avec la ligne, au point considéré, un contact d'ordre 2 au moins (59), (174); *son centre est donc sur la droite polaire* (179).

La proposition générale du n° 62 permet de la considérer de bien des manières comme position limite de sphères variables ayant certains rapports avec la ligne. *Elle jouit de cette propriété relativement à chacune des sphères spécifiées ci-après :*

Celle passant par quatre points de la ligne, infiniment voisins du point de contact ;

Celle passant par trois semblables points, avec un contact du premier ordre avec la ligne en l'un d'eux ;

Celle ayant en deux semblables points des contacts du premier ordre avec la ligne ;

Celle passant par deux points de ce genre, avec un contact du second ordre avec la ligne en l'un d'eux.

189. En appelant x_2, y_2, z_2, R_2 les coordonnées rectangulaires du centre de la sphère osculatrice au point (x, y, z) et son rayon, en conservant les notations ordinaires, ces quatre quantités sont déterminées par les quatre équations

$$(1)\qquad (x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=R_2^2,$$

$$(2)\qquad (x-x_2)\,dx+(y-y_2)\,dy+(z-z_2)\,dz=0,$$

$$(3)\qquad (x-x_2)\,d^2x+(y-y_2)\,d^2y+(z-z_2)\,d^2z=-ds^2,$$

$$(4)\qquad (x-x_2)\,d^3x+(y-y_2)\,d^3y+(z-z_2)\,d^3z=-3\,ds\,d^2s,$$

exprimant que la substitution des coordonnées du point courant de la ligne dans l'équation de la sphère osculatrice en annule le premier membre et ses trois premières dérivées par rapport à la variable auxiliaire t (55). Nous connaissions les trois premières équations (175); quant à la dernière, elle provient de la combinaison de la troisième, différentiée une fois, avec la relation (9) du n° 176.

Les trois dernières équations font connaître x_2, y_2, z_2; leur résolution suivie d'une transformation facile donne

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} & x-x_2=\left(ds^5\,d\,\frac{dy\,d^2z-dz\,d^2y}{ds^3}\right):\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}, \\ & y-y_2=\ldots,\qquad z-z_2=\ldots, \end{aligned}\right.$$

formules dont les deux dernières se déduisent de la première par les permutations circulaires des lettres x, y, z. L'équation (1) donne ensuite R_2.

Ces résultats sont illusoires dans le cas seulement où le déterminant qui leur sert de dénominateur commun vient à s'évanouir, c'est-à-dire (89) aux points de la ligne (supposée non droite) où l'ordre du contact du plan osculateur surpasse 2. Si alors celui de la tangente surpasse 1, les équations (2), (3) sont évidemment incompatibles (86), et la sphère osculatrice n'existe pas à proprement parler; mais un certain plan tangent offre avec la ligne un contact d'ordre maximum > 2 (89), et il pourra être

considéré comme remplaçant la sphère osculatrice. Si non, le cercle osculateur existe (175), et le plan osculateur a un contact d'ordre > 2 (89). Quand le contact du cercle osculateur n'est que d'ordre 2, la sphère osculatrice disparaît, puisque, autrement, sa trace sur le plan osculateur serait un cercle dont le contact avec la ligne serait d'ordre > 2, et le plan osculateur peut être censé la remplacer. Quand le contact du cercle osculateur est d'ordre > 2, toutes les sphères passant par lui, offrent avec la ligne un contact d'ordre $\geqq 3$ (58); l'une d'elles, du moins en général, aura un contact d'ordre maximum > 3, et sera la sphère osculatrice; à son défaut, le plan osculateur en tiendra lieu.

Si le déterminant dont nous parlons, s'évanouit, quelle que soit t, la ligne est plane (89, *in fine*), et réciproquement. La notion de sphère osculatrice est donc inapplicable à une ligne plane (à une droite, à plus forte raison), à moins qu'on ne veuille considérer son plan comme lui en tenant lieu.

L'ordre du contact de la sphère osculatrice avec la courbe, peut s'élever accidentellement au-dessus de 3, sa valeur normale; mais, sauf pour une courbe sphérique, en tous les points de laquelle sa sphère a le caractère osculateur, cette particularité ne peut se présenter qu'en des points exceptionnels de la ligne (71).

190. En considérant x_2, y_2, z_2 comme des coordonnées courantes, et t comme un paramètre, l'équation (2) représente les plans normaux à la ligne; accouplée avec (3), résultat de sa différentiation par rapport à t, elle représente leur enveloppe, c'est-à-dire la surface polaire (179). Associée enfin avec la même et l'équation (4), résultat d'une nouvelle différentiation exécutée sur celle-ci, elle représente l'arête de rebroussement de la surface polaire (150, 111), ou *arête polaire*. En d'autres termes, *le centre de la sphère osculatrice a l'arête polaire pour lieu géométrique*.

Ces observations, combinées avec la théorie des surfaces enveloppes (109 *et suiv.*), donnent les propositions suivantes :

Le lieu du centre de la sphère osculatrice est l'enveloppe de la droite polaire.

Ce centre est la position limite de l'intersection, soit des

plans normaux construits en trois points de la ligne infiniment voisins de celui que l'on considère, soit d'un plan normal et de la droite polaire construits pour deux semblables points.

191. On remarquera, en passant, qu'*aux points correspondants de la courbe considérée et de son arête polaire, les normales principales aux deux lignes sont toujours parallèles.*

Un calcul facile le montrerait; mais, la chose étant de peu d'importance, nous nous contenterons d'observer : 1° que la normale principale de l'arête polaire est la perpendiculaire à la droite polaire, sa tangente, menée dans son plan osculateur, plan normal à la courbe (178); 2° que celle de la ligne proposée est de même perpendiculaire à la même droite polaire et située aussi dans le même plan normal.

192. Pour une courbe plane, le plan osculateur en un point mobile sur elle conserve une position invariable; mais son orientation varie forcément pour une courbe gauche, et l'angle formé par deux plans osculateurs, construits aux extrémités d'un arc emprunté à une pareille courbe, mesure en quelque sorte sa déviation de la forme plane; on nomme cet angle, la *torsion totale* de cet arc. La torsion *moyenne* du même arc est le quotient du même angle divisé par la longueur de l'arc, et la *torsion* en un point est la limite de ce rapport, pour un arc infiniment petit mesuré sur la courbe à partir de ce point. Ce nouvel élément de dissemblance d'une courbe gauche avec une droite, la plus simple des lignes, s'en nomme quelquefois la *deuxième courbure,* par opposition avec la courbure proprement dite (184) qui reçoit alors le nom de *première courbure.*

Le plan osculateur étant sans cesse perpendiculaire à la droite polaire, et celle-ci enveloppant l'arête polaire (190), la torsion totale d'un arc de la courbe considérée est égale à la courbure totale de l'arc correspondant de l'arête polaire (184), c'est-à-dire à $\pm\Delta\sigma_2$, longueur de l'arc correspondant de l'indicatrice sphérique de cette dernière ligne (182). Sa torsion moyenne est donc $\pm\frac{\Delta\sigma_2}{\Delta s}$, et sa torsion au point dont on s'occupe, à $\pm\frac{d\sigma_2}{ds}$;

on la représente habituellement par $\frac{1}{T}$, et l'artifice suivant va nous en procurer l'expression.

En posant

$$(6)\quad \begin{cases} A = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \qquad B = dz\,d^2x - dx\,d^2z, \\ \qquad\qquad C = dx\,d^2y - dy\,d^2x, \end{cases}$$

coefficients des coordonnées dans l'équation du plan osculateur, et

$$(7)\qquad \lambda = \frac{A}{\sqrt{\Delta}}, \qquad \mu = \frac{B}{\sqrt{\Delta}}, \qquad \nu = \frac{C}{\sqrt{\Delta}},$$

cosinus des angles formés avec les axes par une direction déterminée de la tangente à l'arête polaire (droite polaire) (179), Δ conservant sa signification dans la formule (5) du n° 175, on a d'abord

$$(8)\qquad \begin{aligned} \lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz &= 0, \\ \lambda\,d^2x + \mu\,d^2y + \nu\,d^2z &= 0, \end{aligned}$$

à cause de (6), puis

$$(9)\qquad d\lambda\,dx + d\mu\,dy + d\nu\,dz = 0,$$

relation déduite de l'équation (8) différentiée et combinée avec la suivante, puis encore, en vertu de (7),

$$(10)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

d'où, par différentiation,

$$(11)\qquad \lambda\,d\lambda + \mu\,d\mu + \nu\,d\nu = 0.$$

On a enfin par définition

$$(12)\qquad d\sigma_2 = \pm\sqrt{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}.$$

En multipliant ligne à ligne, on trouve ensuite

$$(13)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \lambda & \mu & \nu \\ d\lambda & d\mu & d\nu \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} dx^2 + \ldots & \lambda\,dx + \ldots & d\lambda\,dx + \ldots \\ \lambda\,dx + \ldots & \lambda^2 + \ldots & \lambda\,d\lambda + \ldots \\ d\lambda\,dx + \ldots & \lambda\,d\lambda + \ldots & d\lambda^2 + \ldots \end{vmatrix} \\ \qquad = \begin{vmatrix} ds^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d\sigma_2^2 \end{vmatrix} = ds^2\,d\sigma_2^2, \end{cases}$$

d'où

$$(14)\qquad d\tau_2 = \pm \frac{1}{ds}\,\Upsilon,$$

en ayant égard à (8), (9), (10), (11), (12), et en représentant par Υ le déterminant dont nous venons de former le carré.

Les relations (7) et les résultats de leur différentiation,

$$d\lambda = \frac{\sqrt{\Delta}.d\mathrm{A} - \mathrm{A}\,d\sqrt{\Delta}}{\Delta}, \qquad d\mu = \ldots, \qquad d\nu = \ldots,$$

donnent immédiatement

$$(15)\qquad \Upsilon = \begin{vmatrix} dx & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\mathrm{A}}{\sqrt{\Delta}} & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d\mathrm{A}}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{\mathrm{A}}{\Delta}\,d\sqrt{\Delta} & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\,\mathrm{U},$$

si, pour abréger, on pose

$$(16)\qquad \mathrm{U} = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ d\mathrm{A} & d\mathrm{B} & d\mathrm{C} \end{vmatrix}.$$

En multipliant ligne à ligne les déterminants U et

$$(17)\qquad \mathfrak{E} = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = \mathrm{A}\,d^3x + \mathrm{B}\,d^3y + \mathrm{C}\,d^3z \qquad (6),$$

il vient

$$\mathrm{U}\mathfrak{E} = \begin{vmatrix} dx^2 + \ldots & dx\,d^2x + \ldots & dx\,d^3x + \ldots \\ \mathrm{A}\,dx + \ldots & \mathrm{A}\,d^2x + \ldots & \mathrm{A}\,d^3x + \ldots \\ d\mathrm{A}\,dx + \ldots & d\mathrm{A}\,d^2x + \ldots & d\mathrm{A}\,d^3x + \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} dx^2 + \ldots & dx\,d^2x + \ldots & dx\,d^3x + \ldots \\ 0 & 0 & \mathfrak{E} \\ 0 & -\mathfrak{E} & 0 \end{vmatrix} = \mathfrak{E}^2\,ds^2,$$

si l'on tient compte des relations (6), (17), et

$$(18)\qquad \begin{cases} d\mathrm{A} = d(dy\,d^2z - dz\,d^2y) = dy\,d^3z - dz\,d^3y, \\ d\mathrm{B} = \ldots, \qquad d\mathrm{C} = \ldots, \end{cases}$$

d'où, $\mathfrak{S}$ ne pouvant être supposé nul qu'en des points exceptionnels (189),

$$\text{(19)} \qquad U = \mathfrak{S}\, ds^2.$$

Il suffit maintenant de combiner les relations (14), (15), (19) et (5) du n° 175 pour obtenir l'expression de la torsion cherchée

$$\text{(20)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{T} &= \pm \frac{d\tau_2}{ds} = \pm \frac{\mathfrak{S}}{\Delta} \\ &= \pm \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} : [(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2 + (\ldots)^2 + (\ldots)^2]. \end{aligned} \right.$$

Cette formule ne devient illusoire qu'aux points (réels) de la courbe considérée, où la tangente acquiert avec elle un contact d'ordre > 1 ; pour la discuter, il faudrait changer t en $t + h$, puis développer les deux termes de la fraction en séries entières par rapport à h; la conclusion de cette discussion dépend des ordres relatifs des contacts de la courbe avec sa tangente et son plan osculateur; nous ne pouvons nous arrêter à ce détail.

La torsion s'évanouit certainement quand le numérateur est nul mais non le dénominateur, c'est-à-dire (86), (89) aux points où les ordres des contacts de la courbe sont $= 1$ avec sa tangente et > 2 avec son plan osculateur. Quand elle est nulle quelle que soit t, le numérateur est nul identiquement, et la courbe est nécessairement plane (*loc. cit.*).

La différentielle $d\tau_2$, angle de contingence de l'arête polaire (183, *in fine*), se nomme l'*angle de torsion* de la courbe considérée; on obtient son expression (au signe près), en multipliant par ds le dernier membre de la formule (20).

Le rayon de première courbure étant égal à l'inverse arithmétique de celle-ci (184), on a donné aussi à T, inverse de la torsion, le nom de *rayon de torsion*, assez impropre puisqu'il n'y a ni cercle, ni sphère en jeu naturel.

193. Il est remarquable que l'expression (20) de la torsion *absolue* soit rationnelle par rapport aux différentielles (mieux, dérivées) des coordonnées de la ligne, bien que rapport de différentielles d'arcs qui ne le sont, ni l'une, ni l'autre. La torsion

algébrique est la valeur de la fraction précédée du signe $\pm$ dans le dernier membre de la même relation (20); son signe, identique à celui du numérateur $\mathfrak{T}$ (17), parce que son dénominateur est une somme de carrés, détermine celle des deux allures spéciales que la courbe peut offrir dans le voisinage du point considéré, et que nous allons distinguer.

Le signe de $\mathfrak{T}$ est identique à celui de U (19), par suite (15) à celui de Υ, déterminant dont le carré constitue le premier membre de la relation (13). Or, ce déterminant Υ étant composé avec dx, dy, dz, λ, μ, ν, cosinus directeurs de la normale au plan osculateur, exactement comme le déterminant (1 *bis*) du n° 164 l'est avec dx, dy, dz, ξ, η, ζ, les considérations du n° 164 *bis* conduiront immédiatement à l'observation suivante : *Si les axes coordonnés ont la disposition mentionnée au lieu cité, et selon que la torsion sera positive ou négative, un observateur placé les pieds en* (x, y, z), *la tête en* (x', y', z'), *point infiniment voisin du précédent sur la ligne considérée, verra s'être effectuée de sa gauche vers sa droite, ou en sens contraire, la rotation de la normale au plan osculateur* (*ou de ce plan lui-même, ou de la normale principale*) *passant de la position* (ξ, η, ζ) *à la position* (ξ', η', ζ').

Quand les axes offrent la disposition précitée, la torsion est, par exemple, négative pour les hélices dextrorsum, mais positive pour les hélices sinistrorsum (133).

194. Le rayon R_2 de la sphère osculatrice s'exprime au moyen de R_1, T, rayons de la première courbure et de la deuxième, d'une manière assez simple pour que nous la rapportions. Nous abrégerons beaucoup les calculs en prenant s pour variable auxiliaire (20), ce qui rend $d^2 s = d^3 s = \ldots = 0$.

Dans cette hypothèse, et en tenant compte de (6), (17), les formules (5) prennent la forme simple

$$x - x_2 = \frac{ds^2}{\mathfrak{T}}\, dA, \qquad y - y_2 = \frac{ds^2}{\mathfrak{T}}\, dB, \qquad z - z_2 = \frac{ds^2}{\mathfrak{T}}\, dC,$$

et l'équation (1) donne alors

$$R_2^2 = \frac{ds^4}{\mathfrak{T}^2}(dA^2 + dB^2 + dC^2). \tag{21}$$

Cela posé, on tire des formules (16), (19),

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} U^2 - \mathfrak{T}^2 ds^4 &= \begin{vmatrix} dx^2 + \ldots & A\,dx + \ldots & dA\,dx + \ldots \\ A\,dx + \ldots & A^2 + \ldots & A\,dA + \ldots \\ dA\,dx + \ldots & A\,dA + \ldots & dA^2 + \ldots \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} ds^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & \frac{1}{2}d\Delta \\ 0 & \frac{1}{2}d\Delta & dA^2 + dB^2 + dC^2 \end{vmatrix} \\ &= ds^2 . \Delta(dA^2 + dB^2 + dC^2) - \frac{ds^2}{4}\,d\Delta^2, \end{aligned}\right.$$

à cause des réductions fournies par les relations (6), (18), et (5) du n° 175. De (21) et (22), on conclut, moyennant (19),

$$R_2^2 = \frac{ds^6}{\Delta} + \frac{ds^4\,d\Delta^2}{4\,\Delta\mathfrak{T}^2} = \frac{ds^6}{\Delta} + \left(\frac{\Delta}{\mathfrak{T}}\right)^2 \frac{1}{ds^2}\left[d\,\frac{ds^3}{\sqrt{\Delta}}\right]^2,$$

ou bien, finalement, en ayant égard aux formules (5), (7) du numéro cité et (20),

$$R_2^2 = R_1^2 + T^2\,\frac{dR_1^2}{ds^2},$$

formule où rien n'empêche maintenant de supposer que t est redevenue la variable indépendante.

Développées.

195. L'étude de la distribution des normales à une ligne courbe conduit à des résultats intéressants, que nous avons à faire connaître. Le plan normal à une ligne donnée dépend du seul paramètre t, variable auxiliaire en fonction de laquelle nous supposons exprimées les coordonnées de son pied courant; mais la normale, droite quelconque de ce plan passant par son pied, peut être assujettie à une seconde condition (consistant, par exemple, à rencontrer quelque autre ligne donnée), et, par suite, elle appartient à une famille à deux paramètres. On peut donc (103, I) partager cette famille en une infinité de tribus, dans chacune desquelles les normales ont une enveloppe linéaire. Ces enveloppes sont les *développées* de la courbe proposée.

Pour les trouver, il suffit d'appliquer la méthode du n° 98,

propre aux enveloppes de droites. En désignant par x, y, z les coordonnées rectangulaires du pied d'une normale, fonctions données de t, et par ξ, η, ζ ses cosinus directeurs, fonctions de même nature, les équations de cette droite seront

$$(1) \qquad X = x + \xi T, \qquad Y = y + \eta T, \qquad Z = z + \zeta T,$$

avec les conditions

$$(2) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

d'où

$$(3) \qquad \xi\, d\xi + \eta\, d\eta + \zeta\, d\zeta = 0$$

et

$$(4) \qquad \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz = 0,$$

cette dernière exprimant que la droite (1) est bien une normale à la courbe en son point courant (x, y, z).

La condition pour que cette normale ait une enveloppe est (*loc. cit.*)

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \xi & \eta & \zeta \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations (2), (4), (5) serviront à calculer ξ, η, ζ en fonction de t, après quoi les équations de la développée se formeront en portant dans les équations (1) l'expression de T en t, tirée des équations (5) du numéro cité qui s'écrivent ici

$$(6) \qquad \begin{cases} dx + \xi(dT - \omega\, dt) + d\xi . T = 0, \\ dy + \eta(dT - \omega\, dt) + d\eta . T = 0, \\ dz + \zeta(dT - \omega\, dt) + d\zeta . T = 0, \end{cases}$$

et donnent, après multiplication par dx, dy, dz, puis addition membre à membre avec prise en considération de (4),

$$(7) \qquad T = -\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta}.$$

196. Les propriétés générales des développées sont des conséquences très simples de ces diverses formules.

I. Le système à intégrer pour avoir ξ, η, ζ comprend deux

équations finies (2), (4) et une seule équation différentielle (5) qui est du premier ordre; donc, *ces quantités, par suite l'équation générale des développées, renferment une seule constante arbitraire, et le nombre de ces lignes est illimité.*

II. *Toutes les développées sont situées sur la surface polaire, enveloppe des plans normaux à la ligne considérée* (179).

Car, en ajoutant les équations (1), multipliées par dx, dy, dz et ayant égard à (4), il vient

$$(8)\qquad (X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0.$$

En faisant la même opération avec d^2x, d^2y, d^2z, ayant égard au résultat de la différentiation de l'équation (4),

$$\xi\,d^2x+\eta\,d^2y+\zeta\,d^2z=-(d\xi\,dx+d\eta\,dy+d\zeta\,dz),$$

et à la formule (7), il vient

$$(9)\quad (X-x)\,d^2x+(Y-y)\,d^2y+(Z-z)\,d^2z=dx^2+dy^2+dz^2.$$

Or, les équations (8), (9) sont celles de la surface polaire (*loc. cit.*).

On remarquera l'accord des conclusions de ces deux alinéas avec les considérations générales du n° 103. On notera aussi que *la normale générale, considérée comme droite à deux paramètres, a pour enveloppe-surface la surface polaire, lieu de ses enveloppes linéaires.*

[La même droite rencontrant la ligne considérée, une infinité de fois en chacun de ses points, elle admet encore celle-ci comme enveloppe *affectée de dégénérescence linéaire* (104, I), et on l'obtiendrait effectivement à ce titre, en appliquant la méthode générale du n° 103 à la normale représentée par l'accouplement de l'équation du plan normal à celle d'un plan tangent indéterminé en son pied. Mais notre méthode particulière ne peut la fournir, parce qu'elle implique la supposition tacite que, pour les enveloppes linéaires, cherchées transitoirement, ξ, η, ζ sont des fonctions de t (*Cf.* 132, *in fine*)].

III. *Chaque développée est une ligne géodésique de la surface polaire* (29).

En effet, les équations (6), ajoutées après multiplication par ξ,

η, ζ et prise en considération de (2), (3), (4), donnent

(10) $$dT - \omega\, dt = 0.$$

puis

(11) $$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz}.$$

Or, ξ, η, ζ étant les cosinus directeurs de la tangente à la développée, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sont proportionnels à ceux de sa normale principale (178); celle-ci coïncide donc avec la normale à la surface polaire, puisque, en vertu des relations (11), elle est parallèle à la tangente à la courbe considérée, laquelle est perpendiculaire au plan normal, tangent à la surface polaire.

IV. *La longueur d'un arc de développée est égale à la différence des segments des normales à la courbe proposée, tangentes en même temps à cet arc en ses extrémités, qui sont compris entre leurs contacts avec l'une et leurs pieds sur l'autre.*

En différentiant les équations (1) après avoir substitué à T son expression (7) en t, et en ayant égard aux relations (6), (10), on trouve

$$dX = \xi\, dT, \qquad dY = \eta\, dT, \qquad dZ = \zeta\, dT,$$

puis, en ajoutant les carrés membre à membre et ayant égard à (2),

(12) $$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dT^2 = dS^2,$$

carré de la différentielle de l'arc de la développée. Les équations (1), (2) donnant d'autre part

$$T = (X - x)\xi + (Y - y)\eta + (Z - z)\zeta,$$

T est précisément la distance des points (x, y, z), (X, Y, Z), segment découpé sur la tangente à la développée par son point de contact et son pied sur la courbe. En supposant donc l'arc S compté dans un sens convenable, la relation (12) conduit à

$$dS + dT = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$S + T = \text{const.}$$

et, par suite,

$$S - S' = T' - T.$$

V. *Deux normales à la courbe au même point, qui restent respectivement tangentes à deux développées données, font entre elles un angle constant.*

Soient en effet ξ, η, ζ les cosinus directeurs de l'une et ξ', η', ζ' ceux de l'autre. Comme on a, d'après la condition (4),

$$\xi' dx + \eta' dy + \zeta' dz = 0,$$

les relations (11) donnent immédiatement

$$\xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta = 0,$$

et on trouve de même

$$\xi d\xi' + \eta d\eta' + \zeta d\zeta' = 0,$$

d'où, en ajoutant ces deux dernières membre à membre,

$$d(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') = 0,$$

puis, en intégrant,

$$(13) \qquad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \text{const.}$$

Or, le premier membre de cette équation est précisément le cosinus de l'angle compris entre nos deux normales.

VI. Des deux alinéas précédents, il résulte que si, sur deux développées, on enroule, en les tendant, deux fils flexibles et inextensibles dont les parties libres et rectilignes leur soient respectivement tangentes, qui, par suite, vont concourir normalement à la courbe, et si après les avoir coupés en ce point et fixé leurs extrémités l'une à l'autre, on vient à les dérouler simultanément, en les maintenant tendus tous deux, *leur nœud décrit précisément la courbe proposée.*

La surface polaire étant développable (179), on peut aussi (160) enrouler sur elle une pièce d'étoffe inextensible, primitivement plane, et remplacer le nœud de nos fils par un point attaché à l'étoffe en la trace, sur la courbe, de sa partie restant libre et plane, quand on la maintient tendue. *Quand on vient alors à enrouler l'étoffe sur le tambour constitué par la surface polaire, ou à la dérouler, le point dont il s'agit décrit encore la courbe proposée.*

VII. Le calcul des développées comporte ainsi une intégration; mais il est remarquable qu'*elle cesse d'être nécessaire, dès que l'on connaît une seule de ces lignes.*

Car, en désignant alors par ξ', η', ζ' les cosinus directeurs de la tangente à la développée connue, la relation (13) a lieu, et, pour avoir une développée quelconque, il suffira de résoudre par rapport à ξ, η, ζ les équations *finies* (2), (4), (13), après avoir choisi arbitrairement la valeur de la constante entrant dans la dernière.

197. Quand la courbe proposée est sphérique, sa surface polaire se réduit à un cône ayant pour sommet le centre de la sphère qui la contient (179), et l'une de ses développées dégénère évidemment en ce simple point, par lequel passe sans cesse quelque normale à la courbe. L'intégration dont dépend le calcul de ces lignes se trouve alors toute faite (196, VII).

Quand elle est plane, cas auquel sa surface polaire est un cylindre (179), les particularités suivantes sont à noter.

I. *Parmi ses développées se trouve toujours le lieu du centre de son cercle osculateur, enveloppe de ses normales principales,* ce qui n'a jamais lieu pour une courbe gauche (187).

Cette développée est la trace du cylindre polaire sur le plan de la courbe, partant plane, et c'est à elle que l'on donne plus spécialement le nom de *développée de la courbe.*

Son équation se forme sans intégration aucune, puisqu'elle est l'enveloppe de la normale proprement dite, connue par une équation finie (102). En suite de quoi et de l'alinéa IV du numéro précédent, *la longueur de son arc se calcule aussi sans intégration,* contrairement à ce qui a lieu en général. Ce calcul, nommé par les anciens géomètres *rectification* ou *développement* de l'arc, se trouve ainsi tout fait, en quelque sorte, pour cette développée, d'où le nom de cette courbe, étendu à celles des lignes gauches pour lesquelles cependant l'intégration ne peut être en général évitée.

II. La tangente à une autre développée quelconque, faisant un angle constant avec la tangente correspondant à la développée plane (196, V), coupe sous l'angle complémentaire, par suite

constant aussi, la génératrice correspondante du cylindre polaire. *Toute développée non plane est donc quelque hélice tracée sur le cylindre polaire* (132).

III. Comme le calcul de la développée plane n'exige aucune intégration (I), *il en est de même pour toutes les autres* (196, VII).

De cette observation et de celle qui commence le présent numéro, il résulte en particulier que, *quand une courbe plane ou sphérique est algébrique, ses développées sont toutes aussi des courbes algébriques.*

198. On nomme *développante* d'une courbe donnée toute autre dont celle-ci est quelque développée. La recherche d'une pareille ligne revient évidemment à celle d'une trajectoire orthogonale des tangentes à la courbe donnée (129); comme elle comporte une intégration, l'équation générale de la développante contient une constante arbitraire, et il y a une infinité de ces lignes, situées toutes évidemment sur la surface développable ayant la courbe donnée pour arête de rebroussement (163).

Les développantes d'une ligne plane sont toutes, en particulier, des courbes de cette sorte situées dans le même plan.

La droite, dont la tangente reste immobile, n'a point de développante; elle est évidemment la seule ligne offrant cette particularité.

On pourrait aussi nommer *développante* d'une surface développable donnée toute courbe ayant celle-ci pour surface polaire. La recherche de pareilles courbes revient évidemment à celle des trajectoires orthogonales des plans tangents à la surface donnée (136); leur équation générale contient ainsi deux constantes arbitraires. Quand la surface est un cône, ses développantes sont sphériques (*loc. cit.*); quand elle est un cylindre, elles sont planes (*loc. cit.*); mais un plan n'a point de lignes développantes.



CHAPITRE VIII.

QUESTIONS SE RATTACHANT AUX CONTACTS DU SECOND ORDRE D'UNE SURFACE AVEC LE CERCLE ET LA DROITE.

Distribution des cercles et droites ayant un contact du second ordre avec une surface, en un même point.

199. Les sphères qui, en un point donné d'une surface, offrent avec elle un contact du premier ordre sont en nombre illimité, et leur considération nous a conduits à celle de la normale (117). Parmi elles, aucune ne présente un contact du second ordre, à moins qu'il ne s'agisse d'un point exceptionnel de la surface (204, I, 2°, *inf.*), parce qu'un pareil contact exige six conditions (67), tandis que l'équation d'une sphère indéterminée renferme quatre paramètres seulement. Mais, quatre conditions suffisant pour un contact du second ordre entre une ligne et une surface en un point donné de la dernière (*loc. cit.*), et l'équation d'un cercle renfermant six paramètres (puisque c'est une ligne pouvant être assujettie à passer par trois points de l'espace, arbitrairement choisis), il est présumable qu'*en chaque point d'une surface, une double infinité de cercles offrent avec elle un contact du second ordre*. Or, les observations suivantes établissent l'existence de ces cercles, *leur identité en même temps avec les cercles osculateurs de toutes les lignes pouvant être tracées sur la surface par le point dont il s'agit, même de ses seules sections planes*.

I. Un cercle doué d'un contact du second ordre avec la surface en a un semblable avec la trace de son plan sur la surface (supposé non tangent à celle-ci). Car cette trace est située à la fois sur la surface et sur le plan, qui ont l'une et l'autre, avec le

cercle, des contacts dont les ordres sont, le premier $= 2$ par hypothèse, le second illimité en fait (59).

II. Le cercle osculateur à toute ligne tracée sur la surface offre avec cette dernière (supposée non tangente à son plan) un contact du second ordre au moins, parce que la surface passe par la ligne et offre ainsi un contact du second ordre avec toute autre ligne ayant, comme le cercle, un contact d'ordre 2 avec cette même ligne (58).

III. Quand deux lignes tracées sur la même surface ont le même plan osculateur (non tangent à cette dernière), elles offrent un contact mutuel du second ordre au moins, et, par suite, même cercle osculateur (50, V). Car, ayant toutes deux, avec la surface et avec le plan en question, des contacts dont les ordres sont, illimités pour la première, et $= 2$ pour le second, elles ont aussi des contacts d'ordre 2 avec la trace du plan sur la surface (59), et, par suite, l'une avec l'autre aussi (50, V).

200. La discussion des cercles osculateurs qui appartiennent aux diverses lignes pouvant être tracées sur la surface par le point considéré, a pour base une formule importante que nous établirons tout d'abord. En prenant des axes rectangulaires, et représentant la surface par les équations du troisième mode,

$$(1) \qquad x = \varphi(p, q), \qquad y = \chi(p, q), \qquad z = \psi(p, q),$$

une ligne quelconque tracée sur elle aura pour équations ce que deviennent celles-ci par la substitution à p, q, de fonctions convenables d'une même autre variable auxiliaire t, et le rayon de courbure R de cette ligne sera donné par la formule

$$(2) \qquad R = ds : \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2} \qquad (176, II),$$

où il faut supposer positifs ds et le radical, où, dans les différentiations, x, y, z, s doivent être traitées comme des fonctions composées de t.

Conservant maintenant aux lettres $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ les significations que nous leur avons données aux n°s 118 et autres, nous écrirons

cette formule

$$(3)\quad R = \frac{\mathfrak{l}\, d\frac{dx}{ds} + \mathfrak{m}\, d\frac{dy}{ds} + \mathfrak{n}\, d\frac{dz}{ds}}{\sqrt{\mathfrak{l}^2+\mathfrak{m}^2+\mathfrak{n}^2}\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\ldots}} \cdot \frac{ds\sqrt{\mathfrak{l}^2+\mathfrak{m}^2+\mathfrak{n}^2}}{\mathfrak{l}\, d\frac{dx}{ds} + \mathfrak{m}\, d\frac{dy}{ds} + \mathfrak{n}\, d\frac{dz}{ds}},$$

et nous remarquerons qu'en prenant les radicaux positivement, la première fraction figurant dans le second membre est le cosinus de l'angle θ ayant pour sommet le point considéré sur la surface, pour premier côté la direction *élue* de la normale à la surface, en qualifiant ainsi celle dont les cosinus des angles avec les axes ont les signes de $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ (118, III), pour deuxième côté la direction allant du point considéré au centre de courbure de la ligne tracée sur la surface, puisque nous supposons ds positif (178). Maintenant, le dénominateur de la seconde fraction peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} d\frac{dx}{ds} & d\frac{dy}{ds} & d\frac{dz}{ds} \\ \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix},$$

et, comme on a

$$d\frac{dx}{ds} = \frac{1}{ds^2}(ds\, d^2x - d^2s\, dx), \qquad d\frac{dy}{ds} = \ldots, \qquad d\frac{dz}{ds} = \ldots,$$

il devient

$$(4)\qquad \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} d^2x & d^2y & d^2z \\ \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix} - \frac{d^2s}{ds^2}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix},$$

expression dont le dernier terme s'évanouit à cause des relations (10) du n° 22.

Comme on a, en outre,

$$(4\ bis)\quad \begin{cases} d^2x = \left(\frac{\partial x}{\partial p}d^2p + \frac{\partial x}{\partial q}d^2q\right) + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}dp^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}dp\,dq + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}dq^2\right), \\ d^2y = (\ldots) + (\ldots), \qquad d^2z = (\ldots) + (\ldots), \end{cases}$$

le premier terme se décompose en deux parties provenant de la

substitution successive à d^2x, d^2y, d^2z des premiers et des seconds groupes renfermés entre parenthèses dans leurs expressions ci-dessus. La première partie s'évanouit pour la même cause que le second terme de l'expression (4); quant à la deuxième, elle devient

$$\frac{1}{ds}(U\,dp^2 + 2V\,dp\,dq + W\,dq^2),$$

où nous avons posé, comme au n° 159,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} U &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} \\ \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix}, \qquad V = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q} & \dots & \dots \\ \frac{\partial x}{\partial p} & \dots & \dots \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \dots & \dots \end{vmatrix}, \\ W &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} & \dots & \dots \\ \frac{\partial x}{\partial p} & \dots & \dots \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \dots & \dots \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

La formule (3) prend donc la forme définitive

$$(6)\qquad R = \cos\theta.\delta\,\frac{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2}{U\,dp^2 + 2V\,dp\,dq + W\,dq^2},$$

en écrivant $\cos\theta$ à la place du premier facteur de son second membre, en substituant à ds son expression (11) du n° 22, et en posant, pour abréger, comme au n° 158,

$$(6\ bis)\qquad +\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = \delta\ (= +\sqrt{EG - F^2}) > 0.$$

Elle donne ainsi en grandeur et en direction le rayon de courbure d'une ligne de la surface passant par un point donné, quand on connaît, outre ce point : 1° le rapport $dp : dq$, c'est-à-dire la position de sa tangente (dans le plan tangent) (84); 2° la valeur numérique de $\cos\theta$, c'est-à-dire, soit l'angle formé par son plan osculateur avec le plan normal à la surface ayant même trace sur le plan tangent, soit le supplément de cet angle. Effectivement, R devant être positif et δ étant tel, on devra attribuer

à $\cos\theta$ le signe de la fraction constituant le dernier facteur de l'expression (6).

Quand le dénominateur n'est pas nul, cette formule n'est pas illusoire et donne pour R une valeur $\neq 0$, si $\cos\theta \neq 0$. Effectivement, δ est > 0 et dp, dq ne doivent pas être prises toutes deux égales à zéro, puisque, autrement, les formules (10) du n° 22 donneraient $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, ce que nous supposons n'avoir jamais lieu (10); la condition $EG - F^2 > 0$, qui est toujours remplie (22), s'oppose donc à ce que le numérateur de la fraction puisse être $= 0$. On ne peut d'ailleurs avoir $\cos\theta = 0$; car la nullité de la valeur de R montrerait que le point considéré est singulier pour la ligne tracée sur la surface (175), cas naturellement excepté.

Quand le dénominateur est nul, et en supposant $\cos\theta \neq 0$, deux cas peuvent se présenter. Si l'on a

$$U = V = W = 0 \tag{7}$$

à la fois, le plan tangent à la surface offre avec elle un contact du second ordre au point considéré; car U, V, W sont précisément les valeurs des trois dérivées secondes, par rapport à p et q, du résultat de la substitution de $\varphi(p, q)$, $\chi(p, q)$, $\psi(p, q)$ à X, Y, Z dans l'équation du plan tangent (premier mode) (75), (46).

La ligne considérée a donc toujours un contact du même ordre avec ce plan (56), avec sa propre tangente par suite (59), puisqu'il ne coïncide pas avec son plan osculateur (à cause de $\cos\theta \neq 0$), et il est naturel que son rayon de courbure soit infini (175). *Nous exceptons ce cas, comprenant évidemment celui où la surface considérée serait un plan.*

Si les égalités (7) n'ont pas lieu, le rapport $dp : dq$ a l'une des deux valeurs qui satisfont à l'équation du second degré

$$U\,dp^2 + 2V\,dp\,dq + W\,dq^2 = 0,$$

et la valeur infinie, prise alors pour rayon de courbure, montre qu'il existe un contact du second ordre entre la ligne et sa tangente, entre cette droite et la surface par suite (58), c'est-à-dire que *cette tangente est l'une des deux droites osculatrices de la surface au point considéré* (79).

Quand $\cos\theta$ est nul comme le dénominateur, la formule (6) est illusoire, et il faut revenir à la précédente (2) dont la transformation se trouvait avoir comporté en fait la multiplication des deux termes de son second membre par un même facteur nul. La nullité simultanée de $\cos\theta$ et du dénominateur, entraînée ainsi par celle du facteur en question, montre qu'au point considéré *la coïncidence du plan osculateur de la ligne avec le plan tangent à la surface assure celle de sa tangente avec l'une ou l'autre des droites osculatrices de la surface, et réciproquement* (si, bien entendu, le point considéré est ordinaire pour la ligne aussi) (*Cf.* 215, *inf.*).

201. En nous restreignant à la considération des sections planes de la surface, comme nous pouvons le faire (199) et le ferons désormais, la comparaison de deux sections de même tangente, mais de plans différents, conduit immédiatement au théorème de Meusnier :

Le rayon de courbure d'une section plane oblique est, en grandeur et en position, la projection sur son plan de celui de la section normale de même tangente.

Puisque les sections ont même tangente, le rapport $dp : dq$ est le même pour toutes deux (84), par suite aussi, la valeur $\mathcal{H}$ du produit des deux derniers facteurs du second membre de la formule (6). Celle-ci donne donc :

1° Pour la section normale,

$$R_0 = \mathcal{H} \cos\theta_0,$$

R_0 désignant son rayon de courbure, et θ_0 l'angle, 0 ou π, de sa normale principale avec la direction *élue* de la normale à la surface que nous avons définie ci-dessus (200);

2° Pour la section oblique,

$$R = \mathcal{H} \cos\theta.$$

Si maintenant $\mathcal{H}$ est positif, $\cos\theta_0$ l'est aussi, partant $= 1$, et l'on a

$$R = R_0 \cos\theta,$$

ce qu'il fallait constater; car alors la direction de la normale prin-

cipale de la section normale coïncide avec la direction élue de la normale à la surface. Si, au contraire, $\mathcal{H}$ est négatif, on a

$$\cos\theta_0 = -1, \qquad R_0 = -\mathcal{H}, \qquad R = R_0 \cos(\pi - \theta),$$

et $\pi - \theta$ est encore l'angle des normales principales aux deux sections.

D'après cela, *le cercle osculateur d'une section oblique est précisément la trace, sur son plan, de la sphère qui a pour grand cercle le cercle osculateur de la section normale de même tangente.*

202. Par la substitution de 1 à $\cos\theta$, la formule (6) devient

$$(8) \qquad R = \partial \frac{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2}{U\,dp^2 + 2V\,dp\,dq + W\,dq^2},$$

et fournit les rayons de courbure des seules sections normales, *affectés toutefois du signe + quand ils, c'est-à-dire les normales principales des lignes considérées, coïncident, même en direction, avec la demi-normale élue à la surface* (200), *affectés du signe — dans le cas contraire.* La discussion de ces rayons est rendue très facile et nette par l'intervention de la conique dont nous allons parler et qui est utile à considérer dans d'autres circonstances encore.

Les quantités

$$\mathfrak{p} = P - p, \qquad \mathfrak{q} = Q - q$$

constituent des variables auxiliaires permettant (75) de prendre pour équations du plan tangent à la surface au point dont nous nous occupons

$$(9) \qquad \begin{cases} X = x + \dfrac{dx}{dp}\mathfrak{p} + \dfrac{dx}{dq}\mathfrak{q}, \qquad Y = y + \dfrac{dy}{dp}\mathfrak{p} + \dfrac{dy}{dq}\mathfrak{q}, \\ Z = z + \dfrac{dz}{dp}\mathfrak{p} + \dfrac{dz}{dq}\mathfrak{q}, \end{cases}$$

et, en posant

$$(10) \qquad \mathfrak{e} = +\sqrt{E}, \qquad \mathfrak{g} = +\sqrt{G},$$

les quantités

$$\mathrm{p} = \mathfrak{e}\mathfrak{p}, \qquad \mathrm{q} = \mathfrak{g}\mathfrak{q}$$

sont les coordonnées du point (X, Y, Z) rapporté dans ce plan tangent aux axes rectilignes tracés par (x, y, z) avec

$$\left(\frac{dx}{dp}, \frac{dy}{dp}, \frac{dz}{dp}\right), \qquad \left(\frac{dx}{dq}, \frac{dy}{dq}, \frac{dz}{dq}\right),$$

pour paramètres directeurs (7). Effectivement, nos axes (d'espace) étant rectangulaires, l'expression $\mathfrak{s}(\alpha, \beta, \gamma)$ du numéro cité se réduit à $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ (à cause de $\lambda = \mu = \nu = 0$), par suite à $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ évidemment pour l'un et l'autre des axes plans définis à l'instant, comprenant un angle $\mathfrak{F}$ dont le cosinus se tire de la formule évidente

$$\text{(11)} \qquad \cos\mathfrak{F} = \frac{F}{\mathfrak{eg}} = \frac{F}{+\sqrt{EG}},$$

qu'il est utile de noter en passant.

Dans le même plan, la tangente à la ligne que nous avons tracée sur la surface a pour équation

$$\text{(12)} \qquad \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{e}\,dp} = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{g}\,dq},$$

car elle passe par le point considéré pris pour origine et contient évidemment le point de ce même plan pour lequel on a $\mathfrak{p} = dp$, $\mathfrak{q} = dq$, y ayant ainsi $\mathfrak{e}\,dp$, $\mathfrak{g}\,dq$ pour coordonnées comme nous venons de le voir.

Et, comme, dans le plan tangent, le carré de la distance du point $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ au point de contact, origine, est fourni par l'expression propre aux coordonnées rectilignes obliques

$$\mathfrak{p}^2 + 2\cos\mathfrak{F}\,\mathfrak{pq} + \mathfrak{q}^2 = \mathfrak{p}^2 + 2\frac{F}{\mathfrak{eg}}\mathfrak{pq} + \mathfrak{q}^2 \qquad (11),$$

l'équation du lieu des points obtenus en portant sur les tangentes à toutes les lignes tracées sur la surface par le point (x, y, z) et, à partir de lui, des longueurs égales aux valeurs correspondantes de $\pm\sqrt{R}$ se formera, d'après la formule (8), en éliminant le rapport $dp : dq$ entre les équations (12) et

$$\text{(13)} \qquad \mathfrak{p}^2 + 2\frac{F}{\mathfrak{eg}}\mathfrak{pq} + \mathfrak{q}^2 = \partial\,\frac{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2}{U\,dp^2 + 2V\,dp\,dq + W\,dq^2}.$$

La division des deux membres du résultat par le facteur

commun $\mathfrak{p}^2 + 2\frac{F}{\mathfrak{eg}}\mathfrak{pq} + \mathfrak{q}^2$ [il ne peut prendre la valeur zéro sur le lieu cherché à cause de l'inégalité (6 *bis*) et de l'impossibilité pour R de s'évanouir (200)] et la prise en considération des formules (10) laisse simplement

$$(14) \qquad \frac{U}{E}\mathfrak{p}^2 + 2\frac{V}{\sqrt{EG}}\mathfrak{pq} + \frac{W}{G}\mathfrak{q}^2 = \partial,$$

équation d'une conique qui a le point considéré sur la surface pour centre sans pouvoir y passer à cause de $\partial \neq 0$, et que l'on nomme l'*indicatrice* de la surface en ce point. D'où cette conclusion :

Le rayon de courbure d'une section normale est égal, en grandeur et en signe, au carré du demi-diamètre de l'indicatrice, dont la direction est tracée sur le plan tangent par le plan même de la section.

203. Maintenant, les propriétés bien connues des diamètres des coniques à centre conduisent immédiatement aux propositions suivantes.

I. *En tournant indéfiniment autour de la normale à la surface, et sauf les deux exceptions que nous signalerons tout à l'heure* (204, I, 2°, III, *inf.*), *le plan sécant passe par deux positions mutuellement perpendiculaires dans lesquelles, respectivement, le rayon de courbure de la section est maximum et minimum.*

Ces deux plans normaux rectangulaires, dits *principaux* pour la surface au point considéré, eux-mêmes, les sections qu'ils déterminent sur celle-ci et les rayons de courbure de ces dernières, sont effectivement ceux qui passent par les axes de l'indicatrice. Ces axes sont des tangentes à la surface, auxquelles, ainsi qu'à leurs directions, on donne en conséquence la qualification de *principales*.

II. *Si* R_1, R_2, λ, R_λ *représentent les rayons de courbure des sections principales, l'angle formé avec le plan de la première par celui d'une autre section normale quelconque et le rayon de courbure de cette dernière, on a* (*sauf l'excep-*

tion mentionnée au n° 204, III, *inf.*) la relation

$$(14\ bis)\qquad \frac{1}{R_\lambda} = \frac{\cos^2\lambda}{R_1} + \frac{\sin^2\lambda}{R_2}.$$

Car la même relation existe entre les carrés des demi-axes de l'indicatrice et celui du demi-diamètre faisant l'angle λ avec le premier.

Combinée avec le théorème de Meusnier (201), cette formule permet de calculer les courbures de toutes les sections de la surface, même obliques, quand on connaît seulement les positions et les courbures des seules sections principales.

III. *La somme des inverses arithmétiques des rayons de courbure de deux sections normales dont les plans sont rectangulaires est constante.*

Car l'addition membre à membre de la relation précédente avec ce qu'elle devient par la substitution de $\lambda + \frac{\pi}{2}$ à λ donne

$$\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R_{\lambda+\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

IV. *Pour que deux sections normales aient des rayons de courbure égaux, il faut et il suffit que leurs plans soient également inclinés sur un même plan principal.* Car, les carrés de deux demi-diamètres d'une conique à centre ne peuvent être égaux si leur angle n'a les axes pour bissectrices.

204. L'indicatrice, étant une conique pourvue d'un centre non situé sur elle, ne peut être qu'une ellipse (réelle ou imaginaire), ou une hyperbole, ou une paire (réelle ou imaginaire) de droites distinctes, ce qui dépend du signe du discriminant

$$\left(\frac{V}{\sqrt{EG}}\right)^2 - \frac{U}{E}\frac{W}{G} = \frac{V^2 - UW}{EG},$$

et, par suite, de celui de $V^2 - UW$, puisque E, G sont deux quantités essentiellement positives.

Dans chacun de ces cas, la surface présente au point considéré des particularités de forme qu'il faut noter.

I. $V^2 - UW < 0$. 1° L'indicatrice est une ellipse. Parmi les rayons de courbure des sections normales, carrés de ses demi-

diamètres, aucun n'est infini, et les signes de tous sont identiques, ainsi que, par suite, les directions des normales principales des mêmes sections et les positions des centres principaux de courbure par rapport au plan tangent.

Chaque section et son cercle osculateur, ayant un contact d'ordre 2 l'un avec l'autre, mais d'ordre 1 seulement avec leur tangente commune, sont (dans le voisinage du point considéré) situés d'un même côté de celle-ci (53) ou bien du plan tangent à la surface. Par suite, toutes ces sections, comme leurs cercles osculateurs, puisque R conserve un signe invariable, montrent leur convexité à une même des deux régions que le plan tangent découpe dans l'espace (93). En un pareil point, dit *elliptique*, la surface a ses courbures (principales) *semblables*, sa courbure totale positive (159, I), (209, *inf.*), et, dans son voisinage, elle est convexe pour un observateur qui, par rapport aux points voisins de (x, y, z), serait placé de l'autre côté du plan tangent, comme un ellipsoïde en chacun de ses points, un tore annulaire en ceux de sa jante, etc. Mais les sections principales, comme les axes de l'indicatrice, ne sont déterminées, que si cette conique ne se trouve pas être un cercle.

2° Quand les coefficients de $\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{pq}$, $\mathfrak{q}^2$ dans l'équation de l'indicatrice sont comme $1 : \cos\widehat{\mathfrak{S}}\left[= \frac{F}{\sqrt{EG}}\ (11)\right] : 1$, c'est-à-dire si

$$(15)\qquad \frac{U}{E} = \frac{V}{F} = \frac{W}{G},$$

l'indicatrice est un cercle, les rayons de courbure de toutes les sections normales ont la même valeur, et les sections principales sont indéterminées. Toutes les lignes tracées sur la surface par le point considéré ont ainsi un contact du second ordre avec la sphère unique sur laquelle sont évidemment situés leurs cercles osculateurs. *Cette sphère a donc un contact du second ordre avec la surface* (57).

Le point considéré se nomme alors un *ombilic* de la surface. Tels sont évidemment, pour un ellipsoïde de révolution, ses pôles, pour une sphère, un quelconque de ses points.

On notera que la recherche des ombilics dépend de la résolution, par rapport à p, q, des équations finies simultanées (15). Le

nombre de celles-ci étant 2, égal à celui des inconnues, ces points, quand il en existe, sont en général isolés, pouvant toutefois être tous ceux d'une ligne, même de la surface si elle est sphérique comme nous venons de le dire, quand le système de ces équations n'est pas réduit (319*).

II. $V^2 - UW > 0$. L'indicatrice est une hyperbole. Les deux sections principales passant par les asymptotes ont leurs rayons de courbure infinis; ces asymptotes se confondent ainsi avec les droites osculatrices à la surface au point considéré (200), tangentes qui sont distinctes et auxquelles, pour cette raison, on donne, ainsi qu'à leurs directions, la qualification d'*asymptotiques*.

Les rayons de courbure de deux sections normales sont de signes identiques quand les traces de leurs plans sur le plan tangent tombent à la fois dans l'un des angles formés par les tangentes asymptotiques, de signes opposés dans le cas contraire qui se présente toujours pour les rayons principaux; les centres principaux de courbure sont placés de part et d'autre du plan tangent.

Un point de ce genre est dit *hyperbolique;* les courbures (principales) de la surface y sont *opposées*, sa courbure totale négative (209, *inf.*), et, dans son voisinage, la surface n'est convexe pour aucun observateur, comme un hyperboloïde à une nappe en chacun de ses points, un tore annulaire en ceux de son moyeu, etc.

III. $V^2 - UW = 0$. L'indicatrice est une paire de droites parallèles, auxquelles une des tangentes principales, prenant en même temps, même deux fois, le caractère asymptotique (II), est parallèle, l'autre perpendiculaire.

Le rayon de courbure de la section correspondante à la première tangente principale est infini, aucun de ceux des autres sections normales ne l'est, et tous ont le même signe. Un point de ce genre est *parabolique,* la courbure totale de la surface y est nulle (209, *inf.*), et, dans son voisinage, la surface n'a, d'aucun point de vue, une convexité parfaitement marquée. Sur une surface développable, tous les points (ordinaires) sont paraboliques, puisque la courbure totale s'y évanouit toujours (160, I); sur un

tore annulaire, les points des parallèles séparant sa jante de son moyeu le sont tous aussi.

Pour un point parabolique, et en affectant l'indice 1 à la section principale dont le rayon de courbure n'est pas infini, la formule (14 *bis*) se réduit à

$$R_\lambda = \frac{R_1}{\cos^2\lambda}.$$

205. Relativement aux axes rectilignes que nous avons définis dans le plan tangent à la surface, les tangentes asymptotiques de celles-ci ont évidemment pour équation d'*ensemble*

$$(16)\qquad \frac{U}{E}\mathfrak{p}^2 + 2\frac{V}{\sqrt{EG}}\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \frac{W}{G}\mathfrak{q}^2 = 0,$$

déduite de celle de l'indicatrice (14) par la substitution de o à son second membre. Elles sont imaginaires, réelles et distinctes, ou bien réelles mais confondues, selon que le point considéré est elliptique, hyperbolique ou parabolique. En un ombilic, elles ont les directions *isotropes* du plan tangent.

Les tangentes asymptotiques se confondant avec les droites osculatrices de la surface, figures dont la considération n'a aucune connexité avec celle de la sphère ou du cercle (79), leur équation (16) conserverait la même forme exactement, si nos axes d'espace étaient obliques au lieu d'être rectangulaires, comme nous le supposons (*Cf.* I, *in fine*).

206. Au point de la surface que nous considérons, on dit *conjuguées* deux tangentes constituant deux diamètres conjugués de l'indicatrice. Les coordonnées $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1)$, $(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_2)$ de deux points pris respectivement sur elles, sont liées ainsi par la relation bilinéaire bien connue

$$(17)\qquad \frac{U}{E}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 + \frac{V}{\sqrt{EG}}(\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_2 + \mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_1) + \frac{W}{G}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 = 0,$$

qui fournit immédiatement la direction de l'une quand celle de l'autre est donnée.

Les tangentes principales sont toujours conjuguées, et toute tangente asymptotique coïncide avec sa conjuguée.

Quand le point de la surface est un ombilic, deux tangentes conjuguées sont toujours rectangulaires. Quand il est parabolique, toutes les tangentes ont la tangente asymptotique unique pour conjuguée, et la conjuguée de cette dernière est absolument indéterminée.

L'observation finale du numéro précédent est de tous points applicable à l'équation (17) des tangentes conjuguées.

207. Dans notre système de coordonnées obliques sur le plan tangent, l'ensemble des termes variables de l'équation d'un cercle ayant le point de contact origine pour centre reproduit précisément le premier membre de la relation (13). Si donc $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sont les coordonnées d'un point d'un axe de l'indicatrice, on aura entre elles l'équation

$$(18)\quad \left(\frac{U}{E}\mathfrak{p}+\frac{V}{\sqrt{EG}}\right):\left(\mathfrak{p}+\frac{F}{\sqrt{EG}}\mathfrak{q}\right)=\left(\frac{V}{\sqrt{EG}}\mathfrak{p}+\frac{W}{G}\mathfrak{q}\right):\left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\mathfrak{p}+\mathfrak{q}\right)$$

exprimant la coïncidence des directions qui, à celle de cet axe, sont conjuguées relativement à l'indicatrice et à un cercle concentrique, ou bien, rendue entière,

$$(19)\qquad \frac{FU-EV}{E}\mathfrak{p}^2-\frac{EW-GU}{\sqrt{EG}}\mathfrak{p}\mathfrak{q}-\frac{GV-FW}{G}\mathfrak{q}^2=0,$$

qui représente ainsi l'ensemble des axes de l'indicatrice, aussi bien celui des tangentes principales à la surface. En un ombilic, et à cause des égalités (15), cette équation devient naturellement indéterminée.

208. Pour chaque direction principale, les rapports (18) ont une valeur commune précisément égale à $\partial : R$, R représentant toujours le rayon de courbure correspondant; car on trouve précisément ce dernier rapport, en supposant que $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sont, dans les premiers, les coordonnées d'un sommet de l'indicatrice situé sur l'axe dont il s'agit, en les ajoutant terme à terme, multipliés en haut et en bas par $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, puis en ayant égard à l'équation (14) de l'indicatrice, ainsi qu'à la nature de l'expression du carré de la distance de ce sommet à l'origine. On trouvera de la sorte la valeur de R correspondant à chaque valeur de $\mathfrak{p} : \mathfrak{q}$ fournie par la résolution de l'équation (19).

Mais, si l'on égale à $\partial : R$ chacun des rapports (18), et si l'on élimine les quantités $\mathfrak{p} : \sqrt{E}$, $\mathfrak{q} : \sqrt{G}$ entre les deux équations linéaires et homogènes ainsi formées, on obtiendra une équation en R seulement,

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} (UR - E\partial) & (VR - F\partial) \\ (VR - F\partial) & (WR - G\partial) \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$(21) \quad (UW - V^2)R^2 + (2VF - UG - WE)\partial R + (EG - F^2)\partial^2 = 0.$$

dont la résolution fournira les valeurs des rayons de courbure principaux. Son degré, généralement égal à 2, s'abaisse à 1 et une de ses racines devient infinie, quand le coefficient de R^2 s'y évanouit; mais c'est naturel, puisqu'on se trouve alors en un point parabolique de la surface (204, III).

209. La comparaison de l'équation (21) avec les formules (20) du n° 159 et (12) du n° 158 conduit à ce rapprochement intéressant, *qu'en chaque point de la surface, le produit des inverses de ses rayons de courbure principaux est précisément égal à sa courbure totale.*

210. Nous pouvons actuellement creuser plus profondément la question dont nous avons dit le premier mot en définissant les normales. Quand le point (x, y, z) est le pied d'une normale abaissée du point fixe (a, b, c) de l'espace sur la surface, les équations (6) du n° 119 nous ont montré que la fonction (5 *bis*) de p, q, carré de la distance de ces deux points, satisfait aux premières conditions requises pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum. Cherchons maintenant les demi-dérivées secondes $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ de cette fonction, et pour cela différentions les premiers membres des équations rappelées. Comme elles donnaient auparavant

$$\frac{x-a}{\mathfrak{t}} = \frac{y-b}{\mathfrak{m}} = \frac{z-c}{\mathfrak{n}} = \frac{-r}{\partial},$$

où r désigne la longueur du segment allant de (x, y, z) à (a, b, c), prise positivement ou négativement selon que sa direction ou l'opposée coïncide avec la demi-normale *élue* à la surface (200).

les résultats de ces différentiations pourront facilement être mis sous les formes

$$\mathfrak{u} = \mathrm{E} - \frac{\mathrm{U}}{\partial} r, \qquad \mathfrak{v} = \mathrm{F} - \frac{\mathrm{V}}{\partial} r, \qquad \mathfrak{w} = \mathrm{G} - \frac{\mathrm{W}}{\partial} r.$$

Pour le discriminant de la forme quadratique

$$(22) \qquad \mathfrak{u} h^2 + 2\mathfrak{v} hk + \mathfrak{w} k^2$$

représentant le double de l'ensemble des termes du second degré en h, k dans le développement, par la formule de Taylor, du carré de la distance considérée, après attribution de ces accroissements à p, q, on trouvera donc

$$\mathfrak{u}\mathfrak{w} - \mathfrak{v}^2 = \frac{1}{\partial^2} \mathcal{F}(r),$$

en appelant $\mathcal{F}(\mathrm{R})$, pour abréger, le premier membre de l'équation (21) aux rayons principaux de courbure, et la forme (22) sera définie ou indéfinie selon que $\mathcal{F}(r)$ sera $\gtrless 0$. Trois cas sont présentement à examiner.

Quand (x, y, z) est un point elliptique de la surface, on a

$$\mathrm{UW} - \mathrm{V}^2 > 0,$$

et les centres principaux de courbure sont placés d'un même côté du plan tangent (204, I). Si (a, b, c) tombe entre eux sur la normale à la surface, r est compris entre les racines de l'équation (21), $\mathcal{F}(r)$ est < 0, la forme (22) est indéfinie, et *il n'y a ni maximum, ni minimum* (84***, I). Si (a, b, c) tombe en dehors des mêmes points, un raisonnement analogue montre qu'il y a nécessairement un maximum ou un minimum, et il reste à distinguer. On a toujours $\mathcal{F}(0) > 0$ évidemment, de plus, $\mathcal{F}(r) < 0$ pour $r = \frac{\mathrm{E}\partial}{\mathrm{U}}$ ou $= \frac{\mathrm{G}\partial}{\mathrm{W}}$. Ce dernier point résulte de la forme (20) de $\mathcal{F}(\mathrm{R})$, et son rapprochement du premier montre que ces deux dernières valeurs de r, qui annulent $\mathfrak{u}$ ou $\mathfrak{w}$, sont comprises entre les racines de l'équation (21), par suite, que les signes des coefficients extrêmes de la forme (22), fonctions linéaires de r, ne peuvent pas varier quand (a, b, c) se meut sur la normale en dehors du segment limité par les centres principaux de courbure, mais qu'ils changent tous deux à la fois quand ce point franchit

la *totalité* de segment. La valeur $r = 0$ donnant à $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{w}$ les valeurs E, G essentiellement positives, on conclut de ce qui précède que la forme (22), comme ces deux coefficients à la fois, est positive ou négative, par suite (87***, II), qu'*il y a minimum ou maximum selon que la totalité du segment ci-dessus ne sépare pas ou sépare les points* (x, y, z), (a, b, c).

Pour un point hyperbolique ou parabolique, la discussion se fait de la même manière et conduit à des conclusions analogues, dont nous sommes forcés toutefois de supprimer le développement.

211. Entre l'indicatrice et la surface, il existe une relation géométrique spéciale dont nous ne devons pas omettre la mention. *On retrouve cette conique en prenant sur la demi-normale élue un point situé à la distance infiniment petite* ρ *de son pied, coupant la surface par un plan mené par ce point, parallèlement au plan tangent, construisant dans ce plan, avec ce même point et* $1 : \sqrt{2\rho}$ *pris pour centre et rapport de similitude, une ligne homothétique à l'intersection, puis cherchant la forme limite de cette dernière ligne.*

Les coordonnées de la trace du plan mobile sur la demi-normale en question étant évidemment

$$(23) \qquad x + \frac{\mathfrak{l}}{\delta}\rho, \qquad y + \frac{\mathfrak{m}}{\delta}\rho, \qquad z + \frac{\mathfrak{n}}{\delta}\rho,$$

ce plan sécant a pour équation

$$(24) \qquad \mathfrak{l}\left(X - x - \frac{\mathfrak{l}}{\delta}\rho\right) + \ldots = 0 \qquad (75, \textit{in fine});$$

et si, ayant attribué à p, q, les accroissements $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, on substitue à X, ... dans l'équation précédente les développements des fonctions $\varphi(p + \mathfrak{p}, q + \mathfrak{q})$, ..., on trouvera facilement

$$(25) \qquad \frac{1}{1.2}(U\mathfrak{p}^2 + 2V\mathfrak{p}\mathfrak{q} + W\mathfrak{q}^2) + [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]_3 = \delta\rho,$$

pour la relation qui convient aux points communs à la surface et au plan sécant (24) entre les valeurs de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ supposées de petitesse suffisante; dans cette équation, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]_3$ représente le reste de la série ne comprenant que des termes de degrés $\geqq 3$ en $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$.

En nommant ensuite $\boldsymbol{\mathfrak{p}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{q}}$ les coordonnées d'un point de la section rapporté à des axes rectilignes tracés dans le plan sécant par le point (23), parallèlement à ceux que nous avons définis dans le plan tangent au n° 202, en supposant, pour fixer les idées, que le déterminant $\mathfrak{t}'$ soit un des congénères qui ne s'évanouisse pas, on pourra calculer $\boldsymbol{\mathfrak{p}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{q}}$ en fonction de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ au moyen des relations évidentes

$$\left\{\begin{aligned} y+\frac{m}{\partial}\rho+\frac{dy}{dp}\frac{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}{\boldsymbol{\mathfrak{e}}}+\frac{dq}{dy}\frac{\boldsymbol{\mathfrak{q}}}{\boldsymbol{\mathfrak{g}}}&=\chi(p+\mathfrak{p},q+\mathfrak{q})=y+\frac{dy}{dp}\mathfrak{p}+\frac{dy}{dq}\mathfrak{q}+[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]''_2,\\ z+\frac{n}{\partial}\rho+\frac{dz}{dp}\frac{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}{\boldsymbol{\mathfrak{e}}}+\frac{dz}{dq}\frac{\boldsymbol{\mathfrak{q}}}{\boldsymbol{\mathfrak{g}}}&=\psi(p+\mathfrak{p},q+\mathfrak{q})=z+\frac{dz}{dp}\mathfrak{p}+\frac{dz}{dq}\mathfrak{q}+[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]'''_2,\end{aligned}\right.$$

où $[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]''_2$, $[\mathfrak{p},\mathfrak{q}]'''_2$ représentent des restes de séries entières ne contenant que des termes de degrés $\overline{\geqq} 2$ en $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$. Inversement, la résolution de ces équations par rapport à $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, sous les conditions initiales $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}=0$ pour $\boldsymbol{\mathfrak{p}}=\boldsymbol{\mathfrak{q}}=\rho=0$ (307*), fournira les fonctions de $\boldsymbol{\mathfrak{p}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{q}}$, ρ à substituer dans la relation (25) pour former l'équation de la section rapportée aux axes choisis dans son plan. Or, pour des valeurs infiniment petites de ρ, $\boldsymbol{\mathfrak{p}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{q}}$, les seules que nous considérions, cette opération conduit évidemment à des expressions telles que

$$\mathfrak{p}=\frac{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}{\boldsymbol{\mathfrak{e}}}+A\rho+[\boldsymbol{\mathfrak{p}},\boldsymbol{\mathfrak{q}},\rho]_2^{(\mathfrak{p})},\qquad \mathfrak{q}=\frac{\boldsymbol{\mathfrak{q}}}{\boldsymbol{\mathfrak{g}}}+B\rho+[\boldsymbol{\mathfrak{p}},\boldsymbol{\mathfrak{q}},\rho]_2^{(\mathfrak{q})},$$

dont les derniers termes sont encore des quantités infiniment petites du second ordre au moins par rapport à $\boldsymbol{\mathfrak{p}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{q}}$, ρ. Ces substitutions donneront donc pour équation de la section

$$\frac{1}{1.2}\left(\frac{U}{\boldsymbol{\mathfrak{e}}^2}\boldsymbol{\mathfrak{p}}^2+2\frac{V}{\boldsymbol{\mathfrak{e}}\boldsymbol{\mathfrak{g}}}\boldsymbol{\mathfrak{p}}\boldsymbol{\mathfrak{q}}+\frac{W}{\boldsymbol{\mathfrak{g}}^2}\boldsymbol{\mathfrak{q}}^2\right)+\{\boldsymbol{\mathfrak{p}},\boldsymbol{\mathfrak{q}},\rho\}=\partial\rho,$$

où $\{\boldsymbol{\mathfrak{p}},\boldsymbol{\mathfrak{q}},\rho\}$ représente une série entière en $\boldsymbol{\mathfrak{p}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{q}}$, ρ, dont tous les termes sont du troisième degré au moins par rapport à $\boldsymbol{\mathfrak{p}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{q}}$, $\sqrt{\rho}$; elles donneront enfin, pour celle de la ligne homothétique cherchée,

$$\frac{2\rho}{1.2}\left(\frac{U}{E}\boldsymbol{\mathfrak{p}}_1^2+2\frac{V}{\sqrt{EG}}\boldsymbol{\mathfrak{p}}_1\boldsymbol{\mathfrak{q}}_1+\frac{W}{\sqrt{G}}\boldsymbol{\mathfrak{q}}_1^2\right)+\rho\{\boldsymbol{\mathfrak{p}}_1,\boldsymbol{\mathfrak{q}}_1,\sqrt{\rho}\}'=\partial\rho,$$

où $\boldsymbol{\mathfrak{p}}_1=\boldsymbol{\mathfrak{p}}:\sqrt{2\rho}$, $\boldsymbol{\mathfrak{q}}_1=\boldsymbol{\mathfrak{q}}:\sqrt{2\rho}$ désignent les coordonnées d'un point quelconque de cette dernière, ne s'éloignant pas à l'infini

en même temps que ρ tend vers zéro, où $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1, \sqrt{\rho}\}''$ représente une série entière en $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$, $\sqrt{\rho}$, dont aucun terme n'est indépendant de ce radical. Si maintenant on suppose infiniment petit le facteur commun ρ, après l'avoir supprimé, et si l'on remarque que, d'après sa nature indiquée tout à l'heure, le terme $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1, \sqrt{\rho}\}''$ tend nécessairement vers zéro, on trouvera bien pour forme limite de cette équation celle de l'indicatrice (14). (La considération de la normale a rendu les calculs un peu plus simples, mais on retrouverait aussi bien l'indicatrice, en lui substituant une autre droite quelconque, issue du point considéré sur la surface, non parallèlement au plan tangent.)

212. Quoiqu'on détruise ainsi la symétrie des calculs, chose pourtant si nécessaire à leur parfaite intelligence, on préfère souvent décharger ceux des applications, en substituant aux formules précédentes celles qui dérivent du deuxième mode de représentation de la surface. Le passage à ces dernières est bien facile, car on a alors

$$\varphi(p, q) = p = x, \qquad \chi(p, q) = q = y, \qquad \psi(p, q) = z = F(x, y),$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dp} = 1, \qquad \frac{d\chi}{dp} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dp} = \frac{dz}{dx},$$
$$\frac{d\varphi}{dq} = 0, \qquad \frac{d\chi}{dq} = 1, \qquad \frac{d\psi}{dq} = \frac{dz}{dy},$$

puis

$$\mathfrak{l} = -\frac{dz}{dx}, \qquad \mathfrak{m} = -\frac{dz}{dy}, \qquad \mathfrak{n} = 1,$$

$$E = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2, \qquad F = \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}, \qquad G = 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2.$$

Il vient ensuite

$$\frac{d^2\varphi}{dp^2} = \frac{d^2\varphi}{dp\,dq} = \frac{d^2\varphi}{dq^2} = 0,$$
$$\frac{d^2\chi}{dp^2} = \frac{d^2\chi}{dp\,dq} = \frac{d^2\chi}{dq^2} = 0,$$
$$\frac{d^2\psi}{dp^2} = \frac{d^2z}{dx^2}, \qquad \frac{d^2\psi}{dp\,dq} = \frac{d^2z}{dx\,dy}, \qquad \frac{d^2\psi}{dq^2} = \frac{d^2z}{dy^2},$$

d'où

$$U = \frac{d^2z}{dx^2}, \qquad V = \frac{d^2z}{dx\,dy}, \qquad W = \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Pour simplifier encore l'écriture, on adopte habituellement aussi les notations résultant des formules de définition

$$p = \frac{dz}{dx}, \qquad q = \frac{dz}{dy},$$

$$r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \qquad s = \frac{d^2 z}{dx\,dy}, \qquad t = \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

La demi-normale *élue* est alors celle dont les cosinus directeurs ont les signes de $-p$, $-q$, 1.

Lignes asymptotiques. — Trajectoires conjuguées. Lignes de courbure.

213. Au point (p, q) de la surface (1) (nous nous référons au numérotage des formules dans le paragraphe précédent, que nous prolongerons simplement dans celui-ci), on formera évidemment, dans le troisième mode, les équations d'espace d'une tangente asymptotique (204, II) en tirant de l'équation (16), relative aux axes rectilignes tracés dans le plan de ces droites, une détermination $\beta : \gamma$ du rapport $\mathfrak{p} : \mathfrak{q}$, puis en faisant dans les équations (9) du plan tangent $\mathfrak{p} = \frac{\beta}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{t}$, $\mathfrak{q} = \frac{\gamma}{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}$ désignant la variable auxiliaire propre à ce mode de représentation d'une droite. Le rapport $\beta : \gamma$ étant, comme les coefficients de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ dans l'équation (16), une fonction déterminée de p, q, une tangente asymptotique se trouve être une droite dépendant de ces deux paramètres, appartenant ainsi à une famille décomposable en tribus dans chacune desquelles elle est douée d'une ligne enveloppe dépendant d'une seule constante arbitraire (103, I). Ces lignes sont situées sur la surface, parce qu'elle constitue évidemment l'enveloppe *superficielle* des tangentes asymptotiques (*loc. cit.*), et se nomment ses *lignes asymptotiques*. L'équation (16) étant du deuxième degré fournit pour le rapport $\mathfrak{p} : \mathfrak{q}$ deux déterminations auxquelles correspondent deux familles distinctes de lignes asymptotiques.

214. On peut former directement l'équation différentielle de ces lignes, en cherchant quelles fonctions d'une nouvelle variable

auxiliaire t il faut substituer à p, q dans les équations (1) de la surface pour y tracer une ligne dont la tangente en chaque point soit une asymptote de l'indicatrice correspondante. D'après l'équation (12) cette tangente est représentée dans le plan tangent par

$$(26) \qquad \frac{\mathfrak{p}}{\frac{dp}{dt}} = \frac{\mathfrak{q}}{\frac{dq}{dt}};$$

par suite, il faut et il suffit, pour qu'elle coïncide avec l'une des droites (16), que l'on ait

$$(27) \qquad \mathrm{U}\, dp^2 + 2\mathrm{V}\, dp\, dq + \mathrm{W}\, dq^2 = 0,$$

résultat évident de la substitution à $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, dans cette équation (16), des dénominateurs de la relation (26).

Pour obtenir l'équation finie des lignes asymptotiques il suffira donc de chercher les intégrales de l'équation différentielle (27) aux deux fonctions inconnues p, q de la variable auxiliaire t, par exemple, d'exprimer arbitrairement p en fonction de t, puis d'intégrer la même équation, devenue déterminée relativement à la fonction q restant seule inconnue. La résolution de cette équation par rapport à $\frac{dq}{dt}$ conduit à deux équations *immédiates* dont les intégrales générales contiennent chacune une constante arbitraire et donnent les deux familles de lignes asymptotiques.

L'équation différentielle (27) ne devient indéterminée que si l'on a en même temps $\mathrm{U} = \mathrm{V} = \mathrm{W} = 0$, quelles que soient p, q. En se reportant aux formules (5), on apercevra sans peine qu'en chacun de ses points la surface offre alors, avec son plan tangent, un contact d'ordre > 1 (200), et qu'ainsi elle dégénère en un plan (71). Nous avons excepté ce cas (*loc. cit.*); mais, quand il se présente, on pourrait dire encore que *toutes les lignes sont asymptotiques*.

215. *Il y a identité entre les lignes asymptotiques et celles de la surface dont le plan osculateur coïncide sans cesse avec le plan tangent à cette dernière.*

Ce point, déjà rendu visible par l'observation finale du n° 200, peut être établi catégoriquement comme il suit.

Le plan osculateur à une ligne de la surface, obtenue en prenant pour p, q dans les équations (1) deux fonctions déterminées d'une autre variable auxiliaire t, a pour équation (89)

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

où $dx, \ldots, d^2x, \ldots$ doivent être remplacées par les expressions (10) et (4 *bis*) des nos 22 et 200. Sa coïncidence constante avec le plan tangent exige donc que cette équation soit satisfaite, quelles que soient p, q, par la substitution à X, Y, Z des seconds membres des formules (9). Pour le coefficient de p, par exemple, dans le résultat de cette substitution exécutée sur le déterminant (28), il vient

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dp} & \ldots & \ldots \\ \frac{dx}{dp}dp+\frac{dx}{dq}dq & \ldots & \ldots \\ \frac{dx}{dp}d^2p+\frac{dx}{dq}d^2q+\frac{d^2x}{dp^2}dp^2+2\frac{d^2x}{dp\,dq}dp\,dq+\frac{d^2x}{dq^2}dq^2 & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{dx}{dp} & \ldots & \ldots \\ \frac{dx}{dq} & \ldots & \ldots \\ \frac{d^2x}{dp^2}dp^2+2\frac{d^2x}{dp\,dq}dp\,dq+\frac{d^2x}{dq^2}dq^2 & \ldots & \ldots \end{vmatrix} dq$$

$$= (U\,dp^2+2V\,dp\,dq+W\,dq^2)\,dq,$$

si l'on a égard aux formules (5); il vient de même, pour celui de q,

$$-(U\,dp^2+2V\,dp\,dq+W\,dq^2)\,dp.$$

Comme dp, dq ne peuvent s'évanouir en même temps, la condition cherchée se réduit bien à l'équation (27) des lignes asymptotiques.

216. Une simplification notable se produit quand il s'agit d'une surface réglée, de celle par exemple que représentent les équations (1) du n° 164. Car les identités évidentes

$$\frac{d^2X}{dq^2}=\frac{d^2Y}{dq^2}=\frac{d^2Z}{dq^2}=0,$$

combinées avec la troisième des formules (5), réduisent W à zéro, et, par suite, l'équation différentielle (27) à

$$(29)\qquad U\,dp^2 + 2V\,dp\,dq = 0,$$

se décomposant immédiatement en

$$(30)\qquad dp = 0$$

et

$$(31)\qquad U\,dp + 2V\,dq = 0.$$

L'équation (30) conduit à $p = C$, puis, par la substitution de cette constante arbitraire à p dans les équations (1) du n° 164, *à une première famille de lignes asymptotiques, composée simplement des génératrices rectilignes même de la surface.*

En prenant p pour variable indépendante, l'équation (31) se met sous la forme immédiate, relativement simple,

$$(32)\qquad \frac{dq}{dp} = -\frac{U}{2V},$$

et son intégration fournit la fonction de p à substituer à q dans les équations de la surface, pour avoir celles de ses lignes asymptotiques appartenant à la seconde famille. L'examen de cette équation (32) la fait rentrer dans le type connu sous le nom d'*équation de Riccati,* ce qui confère aux lignes asymptotiques de la deuxième famille certaines propriétés assez simples; mais nous ne pouvons nous y arrêter.

Quand la surface est développable, sa courbure totale est identiquement nulle (160), d'où $V^2 - UW = 0$ (159), puis, $V = 0$ aussi, à cause de $W = 0$ comme nous venons de le trouver pour toute surface réglée. L'équation (27) se réduit à $U\,dp^2 = 0$, d'où $dp = 0$, puis $p = C$. *Les deux familles de lignes asymptotiques se confondent alors en une seule, composée des génératrices de la surface.*

217. Sur une surface quelconque, les lignes asymptotiques n'ont évidemment de points réels que dans les régions où les tangentes asymptotiques le sont, c'est-à-dire que dans celles dont tous les points sont hyperboliques (204, II). Ces régions sont

délimitées par les lignes de points paraboliques (204, III), avec lesquelles, ainsi qu'avec elles-mêmes, les lignes asymptotiques de familles différentes offrent en ces points des contacts du premier ordre au moins, à cause de l'égalité naissant alors entre les valeurs fournies pour $dp : dq$ par l'équation (27).

Sur l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes, le paraboloïde elliptique, par exemple, les lignes asymptotiques sont toujours imaginaires. Sur l'hyperboloïde à une nappe, le paraboloïde hyperbolique, surfaces réglées de deux manières (réelles), les deux familles de ces lignes sont précisément les deux systèmes de génératrices rectilignes (216).

Pour un tore annulaire, ces lignes n'existent que sur son moyeu, limitées dans leurs courses par les parallèles extrêmes auxquelles elles sont toutes tangentes.

218. Des lignes de la surface (1) qui composent une famille au seul paramètre a ont une équation générale de la forme

(33) $$\varkappa(p, q, a) = 0 \qquad (16).$$

et la tangente à celle d'entre elles qui passe par le point (p, q) est entièrement déterminée par la connaissance des valeurs de ces deux dernières quantités. Car le rapport $d_1 p : d_1 q$ relatif à cette tangente sera fourni par l'équation

(34) $$\left[\frac{d\varkappa}{dp}\right] d_1 p + \left[\frac{d\varkappa}{dq}\right] d_1 q = 0$$

formée en différentiant l'équation (33), puis en substituant à a, dans le résultat, son expression en p, q, tirée de la même équation finie. Au point (p, q) dont il s'agit, la tangente conjuguée à celle dont nous parlons (206) est entièrement déterminée aussi par l'équation (17), et constitue en conséquence une droite appartenant à une famille aux deux paramètres p, q, qui a évidemment la surface considérée pour enveloppe générale, et qui se divise en une infinité de tribus dont chacune a pour enveloppe quelque ligne située sur la même surface (103). Ces enveloppes linéaires sont les *trajectoires conjuguées* des lignes (33) qui sont, au même titre, en réciprocité évidente avec ces trajectoires, et leur

équation différentielle se forme encore par le procédé qui nous a déjà fourni celle des lignes asymptotiques (214).

En représentant effectivement par $d_2p : d_2q$ la valeur du rapport $dp : dq$ pour une trajectoire conjuguée, les deux tangentes que nous considérons seront représentées dans le plan tangent par les équations

$$(35) \qquad \frac{\mathfrak{p}}{c\, d_1p} = \frac{\mathfrak{q}}{g\, d_1q}, \qquad \frac{\mathfrak{p}}{c\, d_2p} = \frac{\mathfrak{q}}{g\, d_2q}$$

respectivement, et leur conjugaison exige que la relation (17) soit satisfaite par la substitution à $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_2$ des dénominateurs des équations, ce qui donne

$$(36) \qquad \mathrm{U}\, d_1p\, d_2p + \mathrm{V}(d_1p\, d_2q + d_2p\, d_1q) + \mathrm{W}\, d_1q\, d_2q = 0.$$

Pour avoir l'équation finie des trajectoires conjuguées, il suffit donc d'intégrer cette équation différentielle, après y avoir substitué au rapport $d_1p : d_1q$ son expression en p, q fournie par l'équation (34) et avoir choisi arbitrairement p, par exemple, en fonction de la variable auxiliaire t. Pour l'intégrale q, on trouvera naturellement une autre fonction de t et d'une constante arbitraire.

On remarquera que, si l'équation (33) représentait une famille de lignes asymptotiques, on retrouverait cette même famille pour celle de ses trajectoires conjuguées. Car l'équation (27) donnerait alors

$$d_1p : d_1q = -(\mathrm{V}\, d_1p + \mathrm{W}\, d_1q) : (\mathrm{U}\, d_1p + \mathrm{V}\, d_1q) = d_2p : d_2q,$$

à cause de (36).

219. Le théorème suivant formule la propriété la plus intéressante des trajectoires conjuguées.

La surface développable, enveloppée par le plan tangent à la surface dont le point de contact décrit une trajectoire conjuguée, a pour génératrices les tangentes aux lignes (33), *construites aux points où elles sont coupées par cette trajectoire.*

Au point (p, q) de la surface, ayant (x, y, z) pour coordon-

nées d'espace, l'équation du plan tangent est

$$(37)\quad \mathfrak{l}(X-x)+\mathfrak{m}(Y-y)+\mathfrak{n}(Z-z)=\begin{vmatrix} (X-x) & (Y-y) & (Z-z) \\ \dfrac{dx}{dp} & \dfrac{dy}{dp} & \dfrac{dz}{dp} \\ \dfrac{dx}{dq} & \dfrac{dy}{dq} & \dfrac{dz}{dq} \end{vmatrix}=0$$

et, quand ce point décrit la ligne $p=\varpi(t)$, $q=\chi(t)$, le plan tangent, ne dépendant plus alors que du paramètre unique t, enveloppe une surface développable dont la génératrice est représentée par l'équation (37) associée à la suivante, résultat de sa différentiation par rapport à t (150),

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} & \begin{vmatrix} -\dfrac{dx}{dp}dp-\dfrac{dx}{dq}dq & \dots & \dots \\ \dfrac{dx}{dp} & \dots & \dots \\ \dfrac{dx}{dq} & \dots & \dots \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} (X-x) & \dots & \dots \\ \dfrac{d^2x}{dp^2}dp+\dfrac{d^2x}{dp\,dq}dq & \dots & \dots \\ \dfrac{dx}{dq} & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (X-x) & \dots & \dots \\ \dfrac{dx}{dp} & \dots & \dots \\ \dfrac{d^2x}{dp\,dq}dp+\dfrac{d^2x}{dq^2}dq & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \end{aligned} \right.$$

et, pour former l'équation de cette génératrice rapportée aux axes que nous avons tracés dans le plan tangent, il suffit de substituer à X, Y, Z, dans cette dernière, les seconds membres des formules (9), après y avoir écrit $\mathfrak{p}:\mathfrak{e}$, $\mathfrak{q}:\mathfrak{g}$ à la place de p, q. Le premier des trois déterminants (38) étant évidemment nul, il reste visiblement à cause des formules (5)

$$(39)\qquad -\left(\frac{\mathrm{U}}{\mathfrak{e}}\,\mathfrak{p}\,dp+\frac{\mathrm{V}}{\mathfrak{e}}\,\mathfrak{p}\,dq+\frac{\mathrm{V}}{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{q}\,dp+\frac{\mathrm{W}}{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{q}\,dq\right)=0.$$

Si maintenant on nomme $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ les coordonnées, dans le plan tangent, d'un point courant de la tangente à la ligne considérée, on a (12)

$$dp:dq=\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{e}}:\frac{\mathfrak{q}'}{\mathfrak{g}},$$

substitution dont l'exécution dans l'équation précédente, montre,

en vertu des relations (10), (17), que cette tangente et la génératrice (39) sont mutuellement conjuguées.

Des remarques terminant les nos 205, 206, on infère facilement que les conclusions et formules rencontrées depuis le commencement du présent paragraphe conserveraient leur validité et leurs formes, si, à nos axes rectangulaires, on substituait des axes obliques quelconques.

220. Les raisonnements des nos 213, 214, transportés textuellement des tangentes asymptotiques de la surface à ses tangentes principales (203, I), montrent que ces dernières droites, ayant aussi la surface pour enveloppe superficielle, forment encore deux familles, l'une et l'autre à un seul paramètre, dans chacune desquelles elles enveloppent une certaine ligne dont l'équation différentielle générale est

$$(40) \quad (FU - EV)\,dp^2 - (EW - GU)\,dp\,dq - (GV - FW)\,dq^2 = 0,$$

résultat de la substitution de $\mathfrak{e}\,dp$, $\mathfrak{g}\,dq$ à $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, dans l'équation (19) des tangentes principales. Ce sont les *lignes de courbure* de la surface; il est évident que chacune de leurs familles est composée des trajectoires orthogonales de l'autre famille (127), et qu'on les retrouverait en cherchant les lignes de la surface dont les trajectoires seraient, à leur égard, orthogonales et conjuguées en même temps (218).

221. L'équation (40) n'est indéterminée, que si ses coefficients s'évanouissent tous identiquement, c'est-à-dire que si les relations (15) ont lieu quelles que soient p, q. Quand les numérateurs sont tous identiquement nuls, la surface dégénère en un plan (200), et *on peut considérer comme des lignes de courbure toutes celles qui sont tracées sur lui.*

Dans le cas contraire, tous les points de la surface sont des ombilics (204, I, 2°), et *les lignes de courbure y sont encore absolument indéterminées.* Nous allons constater que *la surface se réduit alors à une sphère.*

A cet effet, nous prendrons x, y pour variables indépendantes, afin de pouvoir, au moyen des formules du n° 212 et d'une trans-

formation facile, mettre les équations (15) sous les formes simples

$$q^2\frac{d(1+p^2)}{dx}-(1+p^2)\frac{dq^2}{dx}=0,\qquad p^2\frac{d(1+q^2)}{dy}-(1+q^2)\frac{dp^2}{dy}=0$$

donnant par des intégrations immédiates

$$(41)\qquad \frac{1+p^2}{q^2}=\mathrm{Y},\qquad \frac{1+q^2}{p^2}=\mathrm{X},$$

où X, Y représentent certaines fonctions indépendantes, la première de x, la seconde de y.

On ne peut avoir $\mathrm{XY}=1$, car la multiplication membre à membre des équations (41) donnerait $1+p^2+q^2=0$, égalité impossible pour une surface réelle. La résolution de ces équations par rapport à p, q est donc toujours possible et donne

$$(42)\qquad p=\frac{dz}{dx}=\left(\frac{\mathrm{Y}+1}{\mathrm{XY}-1}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad q=\frac{dz}{dy}=\left(\frac{\mathrm{X}+1}{\mathrm{XY}-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

système immédiat d'équations différentielles totales (287*), à intégrer pour obtenir l'expression de z. Il n'y a aucune intégrale exceptionnelle, parce que z n'entre pas dans les seconds membres; en ayant égard à l'absence de x dans Y, de y dans X, on trouve, pour condition d'intégrabilité,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Y}+1}{\mathrm{XY}-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(\mathrm{XY}-1)^2}\left[(\mathrm{XY}-1)\frac{d\mathrm{Y}}{dy}-(\mathrm{Y}+1)\mathrm{X}\frac{d\mathrm{Y}}{dy}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{X}+1}{\mathrm{XY}-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(\mathrm{XY}-1)^2}\left[(\mathrm{XY}-1)\frac{d\mathrm{X}}{dx}-(\mathrm{X}+1)\mathrm{Y}\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right],$$

donnant facilement

$$(\mathrm{X}+1)^{-\frac{3}{2}}\frac{d\mathrm{X}}{dx}=(\mathrm{Y}+1)^{-\frac{3}{2}}\frac{d\mathrm{Y}}{dy},$$

et la valeur commune de ces expressions se réduit forcément à une certaine constante que nous représenterons par $-2:\mathrm{R}$, puisqu'elle est ainsi indépendante de x et de y à la fois.

De

$$(\mathrm{X}+1)^{-\frac{3}{2}}\frac{d\mathrm{X}}{dx}=-\frac{2}{\mathrm{R}},$$

on tire immédiatement

$$(X+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x-a}{R},$$

où a est une nouvelle constante, puisque, si elle dépendait de y, X en dépendrait aussi. On trouve de même, en appelant b une autre constante,

$$(Y+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{y-b}{R},$$

c'est-à-dire

$$X+1 = \frac{R^2}{(x-a)^2}, \qquad Y+1 = \frac{R^2}{(y-b)^2},$$

$$XY-1 = \frac{R^2}{(x-a)^2(y-b)^2}[R^2-(x-a)^2-(y-b)^2],$$

et les équations différentielles (42) deviennent

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x-a}{\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}}, \qquad \frac{dz}{dy} = \frac{y-b}{\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}}.$$

Or, leur intégration conduit visiblement à l'équation finie

$$z-c = -\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2},$$

où c est une dernière constante, et qui représente bien la sphère ayant R, a, b, c pour rayon et coordonnées de son centre.

222. La famille des normales à la surface (1) comporte dans ses équations générales deux paramètres seulement, savoir les variables auxiliaires p, q; elle se partage donc en tribus dans lesquelles ces droites ont pour enveloppes certaines lignes, génératrices d'une surface qui sert elle-même d'enveloppe à toute la famille (103). Et il revient au même de dire que, dans chaque tribu, les normales sont les génératrices d'une certaine surface développable (163). Entre ces enveloppes et les lignes de courbure, il existe des relations très remarquables qui sont spécifiées par le théorème suivant.

Il y a identité entre les lignes de courbure de la surface et les lieux des pieds de ses normales qui engendrent des surfaces développables; et, pour chacune de ces lignes, le point de con-

tact de la normale avec l'arête de rebroussement de la surface développable correspondante est précisément le centre du cercle osculateur de la section principale qui est tangente à cette ligne de courbure.

I. En posant

$$(43) \qquad \xi = \frac{l}{\delta}, \qquad \eta = \frac{m}{\delta}, \qquad \zeta = \frac{n}{\delta},$$

cosinus directeurs de la direction élue de la normale à la surface, cette droite a pour équations générales

$$(44) \qquad X = x + \xi T, \qquad Y = y + \eta T, \qquad Z = z + \zeta T,$$

où T représente la longueur du segment rectiligne allant de (x, y, z) à (X, Y, Z); et, si l'on trace une ligne sur la surface en faisant $p = \varpi(t)$, $q = \varkappa(t)$, la condition pour que la normale de pied (p, q) ait une enveloppe (ou bien engendre une surface développable) est (98) que, par des déterminations convenables de T, ω en fonction de t, on puisse satisfaire aux trois équations

$$(45) \qquad \left\{\begin{aligned} dx + \xi(dT - \omega\, dt) + d\xi . T = 0, \\ dy + \eta(dT - \omega\, dt) + d\eta . T = 0, \\ dz + \zeta(dT - \omega\, dt) + d\zeta . T = 0, \end{aligned}\right.$$

où les différentiations doivent être exécutées par rapport à t, en traitant $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ comme des fonctions composées de cette variable, savoir $x = \varphi[\varpi(t), \varkappa(t)]$, $y = \ldots$. Il faut ainsi que l'on ait, quelle que soit t,

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \xi & \eta & \zeta \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix} = 0,$$

et le développement de ce déterminant nous conduirait sans trop de peine à l'équation différentielle (40) des lignes de courbure. Mais une marche indirecte est ici préférable.

On a, d'une part

$$dx = \frac{dx}{dp}\, dp + \frac{dx}{dq}\, dq, \qquad \ldots,$$

$$d\xi = \frac{d\xi}{dp}\, dp + \frac{d\xi}{dq}\, dq, \qquad \ldots, \qquad [dp = \varpi'(t)\, dt,\ dq = \varkappa'(t)\, dt]$$

d'où

$$(46)\qquad \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz = 0,$$

et, d'autre part,

$$(47)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

d'où

$$(48)\qquad \xi\,d\xi + \eta\,d\eta + \zeta\,d\zeta = 0,$$

ces trois dernières relations (46), (47), (48) subsistant quelles que soient les fonctions $\varpi(t)$, $\varkappa(t)$. Si donc, en les prenant en considération, on ajoute membre à membre les équations (45), multipliées par ξ, η, ζ respectivement, il restera simplement

$$d\mathrm{T} - \omega\,dt = 0 \qquad (Cf.\ 196,\ \mathrm{III}),$$

moyennant quoi, ces équations développées se réduiront à

$$(49)\qquad \frac{\dfrac{dx}{dp}\,dp + \dfrac{dx}{dq}\,dq}{\dfrac{d\xi}{dp}\,dp + \dfrac{d\xi}{dq}\,dq} = \ldots = \ldots = -\mathrm{T};$$

et il est clair inversement, que si ces trois rapports sont égaux, on procurera satisfaction simultanée aux équations originaires (45) en prenant $-\mathrm{T}$ égal à leur valeur commune et $\omega\,dt = d\mathrm{T}$.

En ajoutant maintenant, terme à terme, ces mêmes rapports multipliés en haut et en bas par $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dy}{dp}$, $\frac{dz}{dp}$, il vient

$$(50)\qquad -\mathrm{T} = -\delta\,\frac{\mathrm{E}\,dp + \mathrm{F}\,dq}{\mathrm{U}\,dp + \mathrm{V}\,dq},$$

à cause des formules (12) du n° 22 et des transformations évidentes

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dp}\,\frac{d\xi}{dp} + \ldots &= \frac{d}{dp}\left(\xi\,\frac{dx}{dp} + \ldots\right) - \left(\xi\,\frac{d^2x}{dp^2} + \ldots\right)\\
&= -\frac{1}{\delta}\left(\mathfrak{l}\,\frac{d^2x}{dp^2} + \ldots\right)\\
&= -\frac{\mathrm{U}}{\delta} \qquad (46),\ (43),\ (5),\\
\frac{dx}{dp}\,\frac{d\xi}{dq} + \ldots &= -\frac{\mathrm{V}}{\delta} \qquad (ibid).
\end{aligned}$$

En changeant $\frac{dx}{dp}$, $\frac{dy}{dp}$, $\frac{dz}{dp}$ en $\frac{dx}{dq}$, $\frac{dy}{dq}$, $\frac{dz}{dq}$, on trouve de la même manière

(51) $$-\mathrm{T} = -\delta\,\frac{\mathrm{F}\,dp + \mathrm{G}\,dq}{\mathrm{V}\,dp + \mathrm{W}\,dq};$$

et, si l'on a

(52) $$\delta\,\frac{\mathrm{E}\,dp + \mathrm{F}\,dq}{\mathrm{U}\,dp + \mathrm{V}\,dq} = \delta\,\frac{\mathrm{F}\,dp + \mathrm{G}\,dq}{\mathrm{V}\,dp + \mathrm{W}\,dq},$$

les trois rapports (49) seront forcément égaux, parce que les déterminants du tableau formé par nos deux groupes de trois multiplicateurs sont les déterminants différentiels de x, y, z par rapport à p, q, et ne peuvent ainsi s'évanouir.

La condition cherchée équivaut donc à l'équation différentielle (52), dont la mise sous forme entière par rapport à dp, dq reproduit immédiatement celle des lignes de courbure (40).

II. En supposant p, q, T exprimés en fonction de t de manière à satisfaire aux équations (52), (50), (51), les équations (44) représentent la ligne enveloppe d'un tribu de normales, dont le point de contact avec chacune de ces droites est à une distance du point (x, y, z) précisément égale à T, c'est-à-dire à la valeur commune des rapports égaux (52). Or, en ajoutant terme à terme ces derniers, multipliés en haut et en bas l'un par dp, l'autre par dq, il vient bien, en vertu de la formule (8),

$$\mathrm{T} = \mathrm{R},$$

conformément à la dernière partie de notre énoncé.

223. Ce théorème donne des indications intéressantes sur les allures d'une normale dont le pied se déplace sur la surface. Quand ce point décrit une ligne de courbure, nous venons de constater que la normale enveloppe l'arête de rebroussement d'une surface développable passant par cette ligne; quand il se meut indéfiniment sur la surface, la normale reste donc tangente à une certaine surface, lieu des arêtes de rebroussement des surfaces développables qui correspondent à toutes les lignes de courbure de la même famille. Pour une raison identique, la normale reste encore tangente à une autre surface ayant une relation sem-

blable avec les lignes de courbure de l'autre famille. *La surface enveloppe générale des normales* (222), *sorte de développée de la surface proposée* (*Cf.* 195), *se décompose donc en deux nappes correspondant respectivement aux deux familles de lignes de courbure: et, sur chaque normale, ses points de contact avec ces deux nappes limitent, avec son pied, les deux rayons de courbure principaux offerts en ce point par la surface considérée.*

Chaque nappe de la surface développée est visiblement circonscrite à toute surface développable de normales, dont l'arête de rebroussement est située sur l'autre nappe; et, comme deux surfaces développables de ce genre, correspondant à deux lignes de courbure de familles différentes, ont pour génératrice commune la normale passant par l'intersection de ces deux lignes, avec des plans tangents évidemment rectangulaires, *ces deux nappes, contemplées d'un point quelconque d'une normale à la surface et, par suite, de l'espace, offrent des contours apparents qui semblent se couper à angle droit.*

La surface proposée est évidemment une trajectoire orthogonale de la congruence formée par les droites tangentes à la fois aux deux nappes de la surface développée (138); mais l'observation précédente montre bien que deux surfaces prises au hasard ne sont pas toujours les nappes de la développée de quelque même surface.

224. La même proposition permet d'apercevoir immédiatement les lignes de courbure de certaines surfaces particulières.

Pour un plan, où les lignes de courbure sont indéterminées (221), les deux nappes de la surface développée n'existent pas (sont rejetées à l'infini, peut-on dire encore), parce que les normales sont toutes parallèles.

Pour une sphère, où la même indétermination se présente (*loc. cit.*), ces deux nappes dégénèrent en un point qui est le centre de la surface, puisque toutes les normales y concourent.

La normale à une surface développable dont le pied décrit une génératrice, engendre un plan, surface développable, parce qu'elle reste perpendiculaire au plan tangent qui a cette génératrice pour caractéristique, partant parallèle à une direction inva-

riable. Chaque génératrice est donc une ligne de courbure, et toutes appartiennent à une même famille parce que (sauf pour un plan) les unes ne sont pas des trajectoires orthogonales des autres. L'autre famille est évidemment constituée par les trajectoires orthogonales des génératrices.

Au n° 171 nous avons vu qu'en tous les points d'un cercle caractéristique, les normales à la surface enveloppe d'une sphère à un paramètre concourent en un même point de la ligne, lieu du centre de cette sphère. Ces cercles caractéristiques forment donc une famille de lignes de courbure de la surface enveloppe, et la nappe correspondante de la surface développée dégénère en ce lieu linéaire du centre de la sphère enveloppée. Les lignes de courbure de l'autre famille sont les trajectoires orthogonales des cercles caractéristiques.

Quand le rayon de la sphère enveloppée demeure constant, cas auquel la surface enveloppe est une surface canal (*loc. cit.*), la normale à cette surface est sans cesse normale aussi à la ligne servant de lieu au centre de la sphère mobile. Les lignes de courbure de la seconde famille sont donc les traces, sur la surface, de toutes les surfaces développables ayant pour arêtes de rebroussement les (lignes) développées de ce lieu (195 *et suiv.*). Ici, la première nappe de la surface développée dégénère en ce dernier lieu linéaire, et sa seconde nappe, engendrée par les arêtes de rebroussement dont nous venons de parler, est formée par la surface polaire du même lieu.

Quand il s'agit d'une surface de révolution (172), ses parallèles sont ainsi les lignes de courbure d'une famille; ses méridiennes sont celles de l'autre famille, puisqu'elles sont les trajectoires orthogonales des parallèles. Les nappes de la surface développée se réduisent ici à l'axe de la surface considérée, puis évidemment à la surface de révolution, de même axe, ayant pour méridienne la développée plane (197) de la méridienne de la surface considérée.

225. La propriété suivante des lignes de courbure est remarquable par sa simplicité.

Quand l'intersection de deux surfaces est ligne de courbure pour chacune, elles s'y coupent partout sous le même

angle. Réciproquement, si cet angle est constant, et si l'intersection est ligne de courbure pour l'une des surfaces, elle l'est aussi pour l'autre.

Puisque l'intersection est ligne de courbure pour la première surface, la normale à celle-ci ayant cette ligne pour lieu de son pied engendre une certaine surface développable (222), et l'arête de rebroussement de cette dernière est une développée de l'intersection (195), parce que les normales considérées présentent aussi ce caractère normal relativement à la ligne lieu de leurs pieds. Pour une raison semblable, les normales de même pied à l'autre surface, enveloppent une autre développée de l'intersection. Donc, aux points de cette dernière ligne, les normales à nos deux surfaces sont les côtés d'un angle constant (196, V).

La réciproque résulte de ce que les normales à une ligne, faisant un angle constant avec celles qui sont tangentes à une première développée, en enveloppent une seconde (*loc. cit.*).

Quand une ligne de courbure est plane ou sphérique, son plan ou sa sphère coupe donc la surface partout sous le même angle; elle ne peut manquer effectivement d'être une ligne de courbure aussi pour le plan ou la sphère qui la contiennent (221). Cette observation est utile à la recherche des surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques, problème dont plusieurs géomètres se sont beaucoup occupés.

226. Une autre propriété très curieuse et importante est connue sous le nom de théorème de Dupin :

Quand les surfaces de trois familles, chacune à un seul paramètre, se coupent toujours orthogonalement (126), *deux quelconques de ces familles tracent, sur toute surface appartenant à l'autre, ses deux familles de lignes de courbure.*

I. En appelant a_1, a_2, a_3 respectivement les paramètres de nos trois familles de surfaces, nous supposerons que la résolution de leurs équations, par rapport à ces quantités, a permis de les écrire

$$(53)\quad f_1(x, y, z) = a_1, \qquad f_2(x, y, z) = a_2, \qquad f_3(x, y, z) = a_3,$$

où f_1, f_2, f_3 sont des fonctions olotropes, et, de ces dernières, on

tirera, quels que soient a_1, a_2, a_3 (entre certaines limites),

$$(54)\quad x = \varphi(a_1, a_2, a_3), \qquad y = \chi(a_1, a_2, a_3), \qquad z = \psi(a_1, a_2, a_3),$$

où φ, χ, ψ sont des fonctions olotropes de a_1, a_2, a_3 dont le déterminant différentiel ne peut s'évanouir.

Effectivement les équations (53) sont résolubles par rapport à x, y, z, puisque les surfaces représentées par elles sont supposées se couper toujours; le déterminant différentiel de f_1, f_2, f_3 par rapport à x, y, z ne peut s'évanouir, puisque les normales aux trois surfaces en tout point commun forment par hypothèse un trièdre trirectangle au lieu d'être situées dans un même plan, d'où résulte (330*) la non-nullité du déterminant des fonctions φ, χ, ψ fournies par l'inversion de f_1, f_2, f_3.

En regardant a_1 comme un paramètre, a_2 et a_3 comme deux variables auxiliaires, les équations (54) fournissent évidemment une représentation du troisième mode, pour les surfaces de la première famille; d'ailleurs, les déterminants différentiels, par rapport à a_2, a_3, de leurs trois seconds membres associés deux à deux ne peuvent s'évanouir simultanément, puisque autrement, et contrairement à ce que nous venons de constater, celui de φ, χ, ψ s'annulerait en même temps. Les mêmes équations (54) représenteront aussi bien les surfaces de la deuxième famille et de la troisième, en attribuant, à a_2 et a_3 successivement, le rôle de simples paramètres, à a_3, a_1 et a_1, a_2 en même temps, ceux de variables auxiliaires.

Les déterminants différentiels du second ordre dont nous venons de parler sont les éléments du déterminant

$$(55)\qquad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

formé par les mineurs respectivement complémentaires à ceux de cet autre

$$(56)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi}{da_1} & \dfrac{d\chi}{da_1} & \dfrac{d\psi}{da_1} \\ \dfrac{d\varphi}{da_2} & \dfrac{d\chi}{da_2} & \dfrac{d\psi}{da_2} \\ \dfrac{d\varphi}{da_3} & \dfrac{d\chi}{da_3} & \dfrac{d\psi}{da_3} \end{vmatrix},$$

et, comme $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ sont toujours proportionnels à $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ sans pouvoir s'évanouir simultanément plus que ces dérivées (6), le déterminant (55) ne diffère du déterminant différentiel de f_1, f_2, f_3 que par un facteur $\neq 0$, et sa nullité est également impossible.

II. Les quantités $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ étant toujours proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale correspondante de la surface de même indice, la triple orthogonalité constante, supposée aux surfaces considérées, assure l'existence des trois identités

$$(57) \qquad \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3 + \mathfrak{n}_2\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + \ldots = \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 + \ldots = 0,$$

dont la combinaison avec celles de la forme

$$\mathfrak{l}_i \frac{d\varphi}{da_j} + \mathfrak{m}_i \frac{d\chi}{da_j} + \mathfrak{n}_i \frac{d\psi}{da_j} = 0$$

que rend évidentes la nature relative des éléments des déterminants (55), (56), conduit à

$$(58) \qquad \frac{d\varphi}{da_i} : \mathfrak{l}_i = \frac{d\chi}{da_i} : \mathfrak{m}_i = \frac{d\psi}{da_i} : \mathfrak{n}_i,$$

parce que la non-nullité du déterminant (55) s'oppose à ce que la suppression d'une ligne puisse y laisser un tableau dont les trois déterminants s'évanouiraient à la fois.

De (57) et (58), on déduit immédiatement

$$\frac{d\varphi}{da_2}\frac{d\varphi}{da_3} + \frac{d\chi}{da_2}\frac{d\chi}{da_3} + \frac{d\psi}{da_2}\frac{d\psi}{da_3} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{da_3}\frac{d\varphi}{da_1} + \ldots = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{da_1}\frac{d\varphi}{da_2} + \ldots = 0.$$

En différentiant enfin ces trois dernières relations par rapport à a_1, a_2, a_3 respectivement, les ajoutant membre à membre après les avoir multipliées par l'une ou l'autre des permutations des facteurs -1, $+1$, $+1$, puis ayant égard encore une fois aux formules (58), on arrive facilement à

$$(59) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{l}_1 \dfrac{d^2\varphi}{da_2\,da_3} + \mathfrak{m}_1 \dfrac{d^2\chi}{da_2\,da_3} + \mathfrak{n}_1 \dfrac{d^2\psi}{da_2\,da_3} = 0, \\ \mathfrak{l}_2 \dfrac{d^2\varphi}{da_3\,da_1} + \ldots = 0, \qquad \mathfrak{l}_3 \dfrac{d^2\varphi}{da_1\,da_2} + \ldots = 0. \end{array} \right.$$

III. Celles des normales à une surface de la troisième famille, dont les pieds tombent sur son intersection par une surface de la première, ont pour équations générales

$$(X - \varphi) : l_3 = (Y - \chi) : m_3 = (Z - \psi) : n_3,$$

ne contenant plus que a_2 comme paramètre variable, et les identités (58) affectées de l'indice 3 permettent de les écrire

$$X = \varphi + \frac{d\varphi}{da_3}\,T, \qquad Y = \chi + \frac{d\chi}{da_3}\,T, \qquad Z = \psi + \frac{d\psi}{da_3}\,T,$$

moyennant l'intervention de la variable auxiliaire T propre au troisième mode de représentation des droites. Le déterminant caractéristique du n° 98 étant ici

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi}{da_2} & \dfrac{d\chi}{da_2} & \dfrac{d\psi}{da_2} \\ \dfrac{d\varphi}{da_3} & \dfrac{d\chi}{da_3} & \dfrac{d\psi}{da_3} \\ \dfrac{d^2\varphi}{da_2\,da_3} & \dfrac{d^2\chi}{da_2\,da_3} & \dfrac{d^2\psi}{da_2\,da_3} \end{vmatrix} = l_1 \frac{d^2\varphi}{da_2\,da_3} + m_1 \frac{d^2\chi}{da_2\,da_3} + n_1 \frac{d^2\psi}{da_2\,da_3},$$

et s'évanouissant, quel que soit a_2, en vertu de la première des identités (59), les normales en question sont les génératrices d'une certaine surface développable; par suite (222), leurs pieds ont pour lieu une ligne de courbure de la surface considérée dans la troisième famille. Le même raisonnement s'applique évidemment à toute autre combinaison des surfaces mentionnées dans notre énoncé.

227. Le cas particulier procurant au théorème de Dupin son application la plus nette est celui des surfaces du second ordre, homofocales et pourvues d'un centre.

I. En appelant

$$(60) \qquad P > Q > R$$

trois constantes positives et a un paramètre (réel), l'équation

$$(61) \qquad \frac{x^2}{P - a} + \frac{y^2}{Q + a} + \frac{z^2}{R + a} - 1 = 0$$

représente une surface du deuxième degré, ayant l'origine et les

axes coordonnés pour centre et axes de symétrie; elle est imaginaire quand $a < -P$, mais réelle et appartenant aux genres hyperboloïde à deux nappes, hyperboloïde à une nappe, ellipsoïde, selon que a prend l'une ou l'autre des valeurs a_1, a_2, a_3 limitées respectivement par les inégalités

$$(62) \qquad -P < a_1 < -Q, \qquad -Q < a_2 < -R, \qquad -R < a_3.$$

Pour $a = -P$, puis $= -Q$, puis $= -R$, la surface dégénère en trois coniques, la première imaginaire dans le plan des yz, la seconde hyperbole dans celui des zx, la troisième ellipse dans celui des xy, qui sont les lignes focales communes à toutes les surfaces représentées par l'équation (61).

II. *Par tout point* (x, y, z) *de l'espace, étranger aux plans coordonnés, passent trois surfaces de la famille* (61) *appartenant respectivement aux genres caractérisés par les inégalités* (62). Car, les quantités x^2, y^2, z^2 étant alors toutes positives, les substitutions

$$a = -P + \varepsilon, \quad -Q - \varepsilon, \quad -Q + \varepsilon, \quad -R - \varepsilon, \quad -R + \varepsilon, \quad +E,$$

où ε, E sont deux quantités positives variables, la première infiniment petite, la seconde infinie, font prendre au premier membre de l'équation (61) les signes finaux $+, -, +, -, +, -$, assurant, parce que cette expression est fonction olotrope de a partout ailleurs qu'en $-P$, $-Q$, $-R$, la possession, par l'équation en a dont il s'agit, de 3 racines réelles au moins, a_1, a_2, a_3, satisfaisant respectivement aux inégalités (62) (22**). D'ailleurs, la même équation n'en offre aucune autre, parce que l'expulsion des dénominateurs la rend entière avec un degré effectif $= 3$.

III. *Deux quelconques des trois surfaces qui correspondent aux racines* a_1, a_2, a_3 *trouvées ci-dessus se coupent orthogonalement au point* (x, y, z). Car, après sa division par la quantité $a_3 - a_2 \neq 0$, le résultat de la soustraction membre à membre des équations des deux dernières surfaces, par exemple, prend la forme

$$\frac{x}{P+a_2}\,\frac{x}{P+a_3} + \frac{y}{Q+a_2}\,\frac{y}{Q+a_3} + \frac{z}{R+a_2}\,\frac{z}{R+a_3} = 0;$$

montrant la perpendicularité de leurs normales au point dont il s'agit.

IV. *Si les quantités a_1, a_2, a_3 sont limitées par les inégalités* (62), *les trois surfaces*

$$\frac{x^2}{P+a_1}+\frac{y^2}{Q+a_1}+\frac{z^2}{R+a_1}=1, \tag{63}$$

$$\frac{x^2}{P+a_2}+\frac{y^2}{Q+a_2}+\frac{z^2}{R+a_2}=1, \tag{64}$$

$$\frac{x^2}{P+a_3}+\frac{y^2}{Q+a_3}+\frac{z^2}{R+a_3}=1 \tag{65}$$

se coupent toujours en 8 *points réels et distincts.*

En posant

$$[PQR]=\begin{vmatrix} \frac{1}{P+a_1} & \frac{1}{Q+a_1} & \frac{1}{R+a_1} \\ \frac{1}{P+a_2} & \frac{1}{Q+a_2} & \frac{1}{R+a_2} \\ \frac{1}{P+a_3} & \frac{1}{Q+a_3} & \frac{1}{R+a_3} \end{vmatrix}, \tag{66}$$

la soustraction simultanée des éléments de la première colonne de ceux de la seconde, puis de la troisième, conduit à

$$[PQR]=\frac{(P-Q)(P-R)}{(P+a_1)(P+a_2)(P+a_3)}[P], \tag{67}$$

où

$$[P]=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{Q+a_1} & \frac{1}{R+a_1} \\ 1 & \frac{1}{Q+a_2} & \frac{1}{R+a_2} \\ 1 & \frac{1}{Q+a_3} & \frac{1}{R+a_3} \end{vmatrix}. \tag{68}$$

En retranchant ensuite des éléments de la deuxième colonne de ce déterminant ceux de la première multipliés par $1:(Q+a_1)$, puis de ceux de la troisième, ceux de la première multipliés par $1:(R+a_1)$, il vient

$$[P]=\frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}{(Q+a_1)(R+a_1)}[P]', \tag{69}$$

où

$$(70)\quad [P]' = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{Q+a_2} & \dfrac{1}{R+a_2} \\ \dfrac{1}{Q+a_3} & \dfrac{1}{R+a_3} \end{vmatrix} = \frac{(Q-R)(a_2-a_3)}{(Q+a_2)(Q+a_3)(R+a_2)(R+a_3)}.$$

De (67), (69), (70), on conclut

$$[PQR] = \frac{(P-Q)(Q-R)(R-P)(a_2-a_3)(a_3-a_1)(a_1-a_2)}{(P+a_1)(P+a_2)(P+a_3)(Q+a_1)(Q+a_2)(Q+a_3)(R+a_1)(R+a_2)(R+a_3)},$$

moyennant quoi et les inégalités (60), (62), cette expression ne peut être ni nulle ni infinie. Le système des équations (63), (64), (65), linéaires par rapport aux inconnues x^2, y^2, z^2, est donc possible et déterminé, et les formules de Cramer donnent immédiatement

$$x^2 = \frac{[P]}{[PQR]} = \frac{(P+a_1)(P+a_2)(P+a_3)}{(P-Q)(P-R)} \qquad (67),$$

puis, de même,

$$y^2 = \frac{(Q+a_1)(Q+a_2)(Q+a_3)}{(Q-R)(Q-P)},$$

$$z^2 = \frac{(R+a_1)(R+a_2)(R+a_3)}{(R-P)(R-Q)}.$$

Ces expressions étant toutes trois positives à cause des inégalités citées, le point dont nous nous occupons est évidemment établi, et l'on vérifiera facilement que des déterminations quelconques de leurs racines carrées constituent un système de trois fonctions de a_1, a_2, a_3 dont le déterminant différentiel ne peut s'évanouir.

V. De tout ce qui précède, il résulte que le théorème de Dupin est applicable aux trois familles de surfaces représentées par les équations (63), (64), (65) sous les conditions (60), (62), puisque toutes les lignes de courbure de l'une de ces surfaces sont tracées sur elle par les surfaces des deux familles dont elle ne fait pas partie.



ADDITION.

PRINCIPALES FORMULES EN COORDONNÉES POLAIRES.

228. Les coordonnées non rectilignes ont, toutes, l'incommodité très grande d'assigner à un même point des représentations analytiques *multiples*, parfois en nombre illimité, celle aussi de rendre habituellement compliquées les formules relatives aux figures les plus simples, celle encore de se prêter fort mal à la distinction si essentielle à faire entre les points ordinaires et les points singuliers, ainsi qu'à l'établissement des conditions de contact, etc. Pour des recherches tant soit peu générales, on ne saurait donc songer un seul instant à les substituer aux coordonnées rectilignes, auxquelles d'ailleurs leur conception même nous semble être entièrement subordonnée, puisque les définitions, ou tout au moins les représentations géométriques de toutes, font intervenir essentiellement les figures *courbes* dont une notion bien nette ne peut être acquise sans le secours de considérations analytiques, fondées sur l'emploi des coordonnées rectilignes; mais, dans des cas spéciaux et limités, elles rendent de réels services.

Presque toujours, des coordonnées quelconques u, v, w d'un point de l'espace sont liées à ses coordonnées rectilignes x, y, z par trois équations finies caractéristiques

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z, u, v, w) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z, u, v, w) = 0, \\ \varphi_3(x, y, z, u, v, w) = 0, \end{cases}$$

de nature à permettre d'en tirer, dans les conditions normales définies aux nos 307* et suiv., et cela entre des limites plus ou moins écartées, x, y, z et aussi bien u, v, w en fonctions olotropes de u, v, w dans le premier cas, de x, y, z dans le second; ceci exige en particulier que φ_1, φ_2, φ_3 soient des fonctions olo-

tropes de ces six quantités, et que leurs déterminants différentiels par rapport à x, y, z et à u, v, w ne s'évanouissent identiquement ni l'un, ni l'autre.

En attribuant des valeurs constantes u_0, v_0, w_0 à chacune des quantités u, v, w successivement et laissant chaque fois les deux autres variables, les équations (1) représentent, en coordonnées rectilignes, trois surfaces qui se coupent au point défini par les nouvelles coordonnées u_0, v_0, w_0, et dont la considération aide à la conception de beaucoup de détails concernant la transformation.

Cela posé, les formules relatives à une figure donnée, en coordonnées rectilignes et dans l'autre système, pourront évidemment se déduire, soit les dernières des premières, soit celles-ci des autres, à volonté, au moyen d'un simple changement de variables, direct ou inverse, dans lequel les relations (1) joueront le rôle d'équations de transformation (325* *et suiv.*). C'est la méthode que nous suivrons pour établir quelques formules usuelles dans l'emploi des coordonnées *polaires,* les plus utiles, en Astronomie surtout, de toutes celles qui ne sont pas rectilignes.

229. Pour passer des coordonnées rectilignes rectangulaires aux coordonnées polaires en Géométrie plane, les équations de transformation se réduisent à deux seulement

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \rho\cos\omega, \\ y = \rho\sin\omega. \end{cases}$$

Le rayon vecteur ρ est la distance absolue du point (x, y) à l'origine prenant alors le nom de *pôle. L'angle polaire ou longitude* ω est l'amplitude, mesurée par l'arc correspondant de la circonférence décrite du pôle comme centre avec 1 pour rayon (26), de quelque angle dont il suffit de faire tourner une demi-droite autour du pôle et dans un sens de rotation constant pour qu'elle passe de la direction positive de l'axe des x, nommée alors *axe polaire,* à la demi-droite conduisant du pôle au point considéré; cette amplitude est prise positivement ou négativement selon que la rotation est de même sens, ou non, que celle d'une demi-droite tournant de la partie positive de l'axe des x à celle de l'axe des y, à l'intérieur de l'angle droit qu'elles forment. Quelquefois ρ et ω représentent aussi bien la même distance

prise négativement et la même amplitude augmentée alors, ou diminuée, d'un multiple impair de demi-circonférences. Le rayon vecteur du pôle est nul et son angle polaire est absolument indéterminé.

On remarquera que le déterminant différentiel (par rapport à ρ, ω) des seconds membres des formules (2) se réduit à ρ, quantité ne pouvant s'évanouir qu'au pôle.

En coordonnées polaires, une ligne située dans leur plan est représentée par des équations rentrant dans l'un ou l'autre des types suivants, dont le premier est presque inusité :

$$(3) \qquad \begin{cases} f(\omega, \rho) = 0; \\ \rho = F(\omega); \\ \omega = \varphi(t), \qquad \rho = \chi(t). \end{cases}$$

230. Dans l'espace, le passage des coordonnées rectilignes rectangulaires aux coordonnées polaires s'exécute à l'aide des formules

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \rho \cos\omega \sin\theta, \\ y = \rho \sin\omega \sin\theta, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$

Le *rayon vecteur* ρ est toujours la distance du point (x, y, z) à l'origine. La *longitude* ω est l'angle dièdre mesuré et compté comme ci-dessus, dont l'axe des z est l'arête, dont les faces passent, l'une par la partie positive de l'axe des x, l'autre par la demi-droite conduisant de l'origine au point considéré. La *colatitude* θ est l'angle rectiligne ayant pour côtés la partie positive de l'angle des z et la même demi-droite. Quelquefois ρ représente la même distance prise négativement, et ω, θ, les mêmes angles augmentés chacun d'un nombre impair de demi-circonférences. Pour l'origine, ρ est $= 0$ et ω, θ sont complètement indéterminés; pour tout autre point de l'axe des z, θ est un multiple entier de la demi-circonférence, et ω est indéterminé.

Le déterminant différentiel (par rapport à ρ, ω, θ) des seconds membres des formules (4) se réduit à $-\rho^2 \sin\theta$, et ne s'évanouit ainsi qu'aux points de l'axe des z.

Avec ces coordonnées, la représentation analytique d'une sur-

face s'opère par l'un des trois moyens suivants :

$$f(\theta, \omega, \rho) = 0;$$

$$\rho = F(\theta, \omega);$$

$$\theta = \varphi(p, q), \qquad \omega = \chi(p, q), \qquad \rho = \psi(p, q).$$

Pour une ligne, on a de même

$$\begin{cases} f_1(\theta, \omega, \rho) = 0, \\ f_2(\theta, \omega, \rho) = 0, \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} \omega = F_1(\theta), \\ \rho = F_2(\theta). \end{cases}$$

ou bien encore

$$\theta = \varphi(t), \qquad \omega = \chi(t), \qquad \rho = \psi(t).$$

Mais plusieurs de ces formes sont inusitées.

231. En coordonnées polaires, les formules de la mesure des arcs ne sont guère employées que pour les lignes planes. Si l'on suppose ω, ρ exprimés en fonction d'une troisième variable auxiliaire t, les formules de transformation (2), différentiées par rapport à t, donnent immédiatement

$$(5) \qquad \begin{cases} dx = \cos\omega \, d\rho - \rho \sin\omega \, d\omega, \\ dy = \sin\omega \, d\rho + \rho \cos\omega \, d\omega, \end{cases}$$

d'où

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 \, d\omega^2 \qquad (25),$$

et, par suite

$$s = \int_{t_0}^{t} dt \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2},$$

ou aussi bien

$$s = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2},$$

quand on emploie le deuxième mode de représentation (3), ce qui se fait souvent.

232. L'évaluation des aires planes en cordonnées polaires a pour base celle de l'aire A, comprise entre les rayons vecteurs correspondant aux angles polaires ω_0, Ω, et la ligne représentée par l'équation (3); car toute aire plane peut être décomposée

(additivement ou soustractivement) en quelques autres de cette sorte.

En coordonnées rectilignes rectangulaires, on peut évidemment écrire pour l'aire A (comme pour toute autre de la nature de celles qui ont été définies au n° 32),

$$A = \iint 1 . dx\, dy,$$

l'intégrale double étant prise à l'intérieur même de cette aire (106***). Pour passer aux coordonnées polaires, il suffit donc d'appliquer la formule (14) du n° 108*** au cas où les formules de transformation sont les relations (2).

Le déterminant différentiel, par rapport à ρ, ω de ces expressions de x, y, se réduisant à ρ comme nous l'avons dit, il vient ainsi

$$A = \iint \rho\, d\rho\, d\omega,$$

et l'aire auxiliaire E, du n° 108***, où il faut prendre cette nouvelle intégrale double, est limitée par l'axe des ω, par les deux droites et la ligne ayant pour équations (en coordonnées rectangulaires) : $\omega = \omega_0$, $\omega = \Omega$, $\rho = F(\omega)$.

Il vient ainsi (105***, V)

$$A = \int_{\omega_0}^{\Omega} d\omega \int_0^{F(\omega)} \rho\, d\rho = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{F(\omega)^2}{2}\, d\omega,$$

formule que l'on écrit plus simplement

$$A = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\Omega} \rho^2\, d\omega,$$

en sous-entendant que l'on a $\rho = F(\omega)$.

233. Pour calculer en coordonnées polaires un volume de forme quelconque, il suffit évidemment de savoir évaluer un volume V limité par une plaque de surface ayant pour équation $\rho = F(\theta, \omega)$, et par les onglets jointifs de surfaces coniques dont on engendre l'ensemble en faisant raser le bord de cette plaque à une demi-droite mobile issue de l'origine.

Comme on peut écrire

$$V = \iiint 1 . dx\, dy\, dz,$$

cette intégrale étant prise à l'intérieur de ce volume lui-même (111*** *et suiv.*), et comme, en valeur absolue, le déterminant différentiel des seconds membres des formules (4) se réduit à $\rho^2 \sin\theta$, on a aussi (116***)

$$V = \int\int\int \rho^2 \sin\theta \, d\theta \, d\omega \, d\rho;$$

ici, le volume auxiliaire U du numéro cité est limité par la plaque correspondante de la surface représentée par la même équation $\rho = F(\theta, \omega)$ construite en coordonnées rectangulaires auxiliaires, par la projection E de cette plaque sur le plan des $\theta\omega$, et par les cylindres dont cette projection est la section droite de l'ensemble.

Il vient donc

$$V = \int\int d\theta \, d\omega \int_0^{F(\theta,\omega)} \rho^2 \sin\theta \, d\rho = \int\int \frac{F(\theta, \omega)^3}{3} \sin\theta \, d\theta \, d\omega,$$

ou, plus simplement,

$$V = \frac{1}{3}\int\int \rho^3 \sin\theta \, d\theta \, d\omega,$$

et l'intégration double restant à exécuter, par rapport à θ, ω, doit l'être dans l'aire auxiliaire E.

234. Les coordonnées polaires ne sont pour ainsi dire jamais employées dans l'étude des lignes gauches. Pour une ligne plane, on n'écrit pas l'équation même de sa tangente; on se contente de calculer l'angle V formé avec le rayon vecteur par la direction de la tangente dont les points ont des angles polaires supérieurs à celui du point de contact.

En admettant, pour fixer les idées, que sur la ligne et à partir du point considéré les quatre coordonnées x, y, ρ, ω soient positives et croissent toutes en même temps, en les supposant toutes exprimées en fonction d'une même variable auxiliaire t, les tangentes des angles formés avec la partie positive de l'axe des x (axe polaire) ont pour expressions $\frac{y}{x}$ et $\frac{dy}{dx}$ (92). Il en résulte

$$(6) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy} = \frac{x^2 \, d\frac{y}{x}}{\frac{1}{2}\, d(x^2 - y^2)}.$$

Mais les formules (2) pour le passage des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires donnant

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \omega, \qquad x^2 + y^2 = \rho^2,$$

d'où

$$d\frac{y}{x} = \frac{d\omega}{\cos^2 \omega}, \qquad \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = \rho \, d\rho,$$

la relation précédente devient finalement

$$\operatorname{tang} V = \rho : \frac{d\rho}{d\omega};$$

et comme rien n'empèche de supposer que, pour la variable auxiliaire t, on a pris ω, le diviseur est la dérivée, par rapport à ω, de ρ considéré comme fonction de cette quantité en vertu de l'équation de la ligne.

Outre les autres hypothèses normales à faire sur les coordonnées, il resterait à examiner le cas singulier où $\rho = 0$, d'où

$$x = y = 0,$$

ce qui rend l'angle V indéterminé et la relation originaire (6) illusoire; mais nous ne pouvons insister.

235. Quelquefois, mais bien plus rarement, on emploie l'expression du rayon de courbure d'une courbe plane rapportée à des coordonnées polaires. Pour la déduire de celle fournie en coordonnées rectangulaires par la première des formules (18) du n° **186**, nous raisonnerons comme au n° **231** où nous avons déjà trouvé celle du numérateur. En différentiant une fois de plus les relations (2) (toujours par rapport à t), il vient

$$\begin{aligned} d^2 x &= -2 \sin \omega \, d\rho \, d\omega - \rho \cos \omega \, d\omega^2 + \cos \omega \, d^2 \rho - \rho \sin \omega \, d^2 \omega, \\ d^2 y &= 2 \cos \omega \, d\rho \, d\omega - \rho \sin \omega \, d\omega^2 + \sin \omega \, d^2 \rho + \rho \cos \omega \, d^2 \omega; \end{aligned}$$

on en conclut

$$dx \, d^2 y - dy \, d^2 x = \rho^2 \, d\omega^3 + 2 d\rho^2 \, d\omega - \rho \, d^2 \rho \, d\omega + \rho \, d\rho \, d^2 \omega,$$

d'où l'expression cherchée.

En prenant ω pour variable indépendante, comme on le fait habituellement, on a $d^2\omega = 0$, et, par suite, en divisant haut et bas par $d\omega^3$,

$$R_1 = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \left[\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\omega^2}\right];$$

c'est l'expression la plus usitée.

FIN DE LA QUATRIÈME ET DERNIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA QUATRIÈME PARTIE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA QUATRIÈME PARTIE.

25031 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.